

Leçon1 : Calcul numérique partie5

Identités remarquables

Présentation globale

V) Identités remarquables

Capacités attendues

- Maitriser les techniques de calcul numérique.
- Appliquer les identités remarquables dans le développement et la factorisation des expressions algébriques

Recommandations pédagogiques

- On appliquera les différentes connaissances acquises sur les ensembles de nombre,
- On introduira des symboles ensemblistes et on renforcera ces connaissances et des Compétences acquises dans le cycle collégial ;
- On choisira des situations qui mettent en évidence le rôle des mathématiques dans le Traitement des situations issues de la vie courante
- On introduira aux élèves des connaissances essentielles relatives à la calculatrice scientifique (Calcul d'une racine carrée, somme algébriques, valeurs approchées.....) ;

V) Identités remarquables : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ 4) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

5) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ Somme de deux cubes

6) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ Cube d'une Somme

7) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ Cube d'une différence

Ces formules sont pour développer et pour factoriser

Factoriser une expression, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

Applications 1: Développement

En utilisant les Identités remarquables développer les produits suivants comme pour les exemples :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + 5^2$ $= 9x^2 + 30x + 25$	$(3x - 7)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 7 + 7^2$ $= 9x^2 - 42x + 49$	$(5x - 6)(5x + 6) = (5x)^2 - 6^2$ $= 25x^2 - 36$
$(7x + 8)^2 =$	$(4x - 7)^2 =$	$(x - 3)(x + 3) =$
$(4x + 2)^2 =$	$(6x - 1)^2 =$	$(9x - 4)(9x + 4) =$
$(x + 1)^2 =$	$(5x - 9)^2 =$	$(6x + 5)(6x - 5) =$
$(9 + 5x)^2 =$	$(2 - 4x)^2 =$	$(2 + x)(2 - x) =$

Applications 2: factorisations

Factoriser une somme algébrique c'est la transformer en produit.

1/ Utilisation des identités remarquables $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$

Somme algébrique à factoriser	Forme reconnue : $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$	Résultat de la factorisation
$4x^2 + 36x + 81$	$= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 9 + 9^2$	$= (2x + 9)^2$
1/ $25x^2 + 70x + 49$	=	=
2/ $12x + 9x^2 + 4$	=	=
3/ $25x^2 + 9 - 30x$	=	=
4/ $9x^2 - 24x + 16$	=	=
5/ $9x^2 + 48x + 64$	=	=
6/ $x^2 - 10x + 25$	=	=

2/ Utilisation de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (\text{différence de deux carrés})$.

Somme algébrique à factoriser	Forme reconnue : $a^2 - b^2$	Résultat de la factorisation
$4x^2 - 25$	$= (2x)^2 - 5^2$	$= (2x - 5)(2x + 5)$
1/ $x^2 - 49$	=	=
2/ $16 - x^2$	=	=
3/ $64x^2 - 9$	=	=
$(x-1)^2 - 36$	$= (x - 1)^2 - 6^2$	$= [(x - 1) + 6][(x - 1) - 6]$ $= [x - 1 + 6][x - 1 - 6]$ $= (x + 5)(x - 7)$
5/ $25 - (2x + 3)^2$	=	=
6/ $(7x - 3)^2 - (3x + 7)^2$	=	=

3/ Utilisation de la distributivité en identifiant un facteur commun : $k \times a + k \times b =$

Somme algébrique à factoriser	Forme reconnue : $k \times a + k \times b$	Résultat de la factorisation
$6x - 15$	$= 3 \times 2x - 3 \times 5$	$= 3(2x - 5)$
1/ $12 + 3x$	=	=
2/ $x^2 + 7x$	=	=
3/ $14x - 7$	=	=
4/ $2x - 8x^2$	=	=
$(2x+3)(5x-7) - (2x+3)(x-1)$	$= (2x+3)(5x-7) - (2x+3)(x-1)$	$= (2x+3)[(5x-7) - (x-1)]$ $= (2x+3)[5x-7-x+1]$ $= (2x+3)(4x-6)$
5/ $7(x-5) - (x-5)(9-2x)$	=	=
6/ $(2x-3)^2 + (2x-3)(x+1)$	=	=

4/Lorsque le facteur commun se cache ou qu'une factorisation peut en cacher une autre.

Factoriser les expressions suivantes en suivant l'indication

$A = (2x-3)(x+1) - 5(4x-6)$ (factoriser $(4x-6)$ puis A) $A = (2x-3)(x+1) - 10(2x-3)$ $A = (2x-3)(x+1-10)$ $A = (2x-3)(x-9)$	$B = 16x^2 - 1 - (4x-1)(x-3)$ (factoriser $16x^2 - 1$ puis B) $B =$ $B =$ $B =$ $B =$ $B =$
$C = 18x^2 - 50$ (mettre 2 en facteur puis factoriser) $C =$ $C =$ $C =$	$D = (3x + 1)(6x - 9) - (2x - 3)^2$ (factoriser $6x - 9$) $D =$ $D =$ $D =$ $D =$ $D =$

Exercice : $x \in \mathbb{R}$ développer et calculer et simplifier :

$$A = (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 \quad \text{et} \quad B = [(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})]^2$$

$$C = (\sqrt{2} + 1)^3 \quad D = (3x - 2)^3 \quad E = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$F = (200520052006)^2 - (200520052005 \times 200520052007)$$

(Lorsque la calculatrice tombe en panne ou ne peut pas calculer)

Correction : $A = (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - ((\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2)$

$$A = 5 + 2\sqrt{10} + 2 - (5 - 2\sqrt{10} + 2) = 5 + 2\sqrt{10} + 2 - 5 + 2\sqrt{10} - 2 = 4\sqrt{10}$$

$$B = [(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})]^2 = ((\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2)^2 = (2 - 3)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$C = (\sqrt{2} + 1)^3 = (\sqrt{2})^3 + 3(\sqrt{2})^2 \times 1 + 3\sqrt{2}(1)^2 + (1)^3 = 2\sqrt{2} + 3 \times 2 + 3\sqrt{2} + 1$$

$$C = 5\sqrt{2} + 7$$

$$D = (3x - 2)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2 \times 2 + 3 \times 3x \times (2)^2 - (2)^3$$

$$D = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$$

$$E = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = (x + 2)(x^2 - 2 \times x + 2^2) = x^3 + 2^3 = x^3 + 8$$

$$F = (200520052006)^2 - (200520052005 \times 200520052007)$$

On remarque que les nombres : 200520052006 et 200520052005

Et 200520052007 diffèrent par leurs chiffres des unités

Pour simplifier on pose : $x = 200520052006$

Donc : $200520052005 = x - 1$ et $200520052007 = x + 1$

$$\text{Donc : } F = x^2 - (x-1)(x+1) = x^2 - (x^2 - 1) = x^2 - x^2 + 1 = 1 \quad \text{Donc : } F = 1$$

Exercice : Factoriser les expressions suivantes : $x \in \mathbb{R}$

1) $49x^2 - 81$ 2) $16x^2 - 8x + 1$ 3) $x^3 - 8$

4) $C = (a + 1)(2a - 3) + 6(a + 1)$ $D = 27x^3 + 1$

Correction : 1) On regarde l'expression, pour choisir l'identité remarquable à appliquer.

L'expression semble être de la forme : $a^2 - b^2$.

$$49x^2 - 81 = (7x)^2 - 9^2 = (7x - 9)(7x + 9) \text{ il s'agit d'un produit. L'expression est factorisée.}$$

$$2) 16x^2 - 8x + 1 = (4x)^2 - 8x + 1^2 = (4x)^2 + 2 \times (4x) \times 1 + 1^2 = (4x + 1)^2$$

$$3) x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 2^2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

4) $(a + 1)$ est le facteur commun.

$$C = (a + 1)(2a - 3 + 6) \quad \text{Donc } C = (a + 1)(2a + 3)$$

5) $D = 27x^3 + 1 \rightarrow$ Il n'y a pas de facteur commun.

\rightarrow L'expression semble être de la forme $a^3 + b^3$.

$$D = 27x^3 + 1 = (3x)^3 - 1^3 = (3x+1)((3x)^2 - 1(3x) + 1^2)$$

$$= (3x+1)(9x^2 - 3x + 1)$$

Donc : Méthodes : Pour factoriser une expression, on doit :

- identifier une identité remarquable ou

- identifier un facteur commun

Attention : on ne peut pas toujours factoriser une expression

exemple : $16x^2 + 8x + 3 = (4x+1)^2 + 2$; cette expression ne peut pas être factorisée sous la forme d'un produit de deux facteurs de degré 1

Exercice : Remplissez les blancs suivants :

$$10 - 4\sqrt{6} = (\dots - \dots)^2 \quad \text{et} \quad 4 + 2\sqrt{2} = (\dots + \dots)^2$$

Correction : $1) 4 + 2\sqrt{3} = 4 + 2 \times \sqrt{3} \times 1 = 3 + 2 \times \sqrt{3} \times 1 + 1 = (\sqrt{3})^2 + 2 \times \sqrt{3} \times 1 + (1)^2$

$$4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$$

$$10 - 4\sqrt{6} = 10 - 2 \times 2 \times \sqrt{6} = (2)^2 + 2 \times \sqrt{6} \times 2 + (\sqrt{6})^2$$

$$10 - 4\sqrt{6} = (2 - \sqrt{6})^2$$

Exercice : Montrer et utiliser une égalité

1. Montrer que pour tous nombres a et b de \mathbb{R} on a l'égalité suivante :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

2. Utiliser cette égalité pour factoriser $x^3 - 8$.

Correction : Développer $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ pour vérifier.

2. Avec $a = x$, et $b = 2$: $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

Exercice : Factoriser les expressions suivantes : $x \in \mathbb{R}$

$$A = 16x^2 - 8x + 1 ; B = 16 - 25x^2 ; C = 1 - (1 - 3x)^2$$

$$D = (2x - 1)^3 - 8 ; E = 27 + x^3 ; F = x^{12} - 2x^6 + 1$$

$$H = x^3 + 1 + 2(x^2 - 1) - (x + 1) \quad \text{et} \quad G = x^5 + x^3 - x^2 - 1$$

Correction : $A = 16x^2 - 8x + 1 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 1 + 1^2 = (4x - 1)^2$

$$B = 16 - 25x^2 = (4)^2 - (5x)^2 = (4 - 5x)(4 + 5x)$$

$$C = 1 - (1 - 3x)^2 = 1^2 - (1 - 3x)^2 = (1 - (1 - 3x))(1 + (1 - 3x))$$

$$C = (1 - 1 + 3x)(1 + 1 - 3x) = 3x(2 - 3x)$$

$$D = (2x - 1)^3 - 8 = (2x - 1)^3 - 2^3 = \quad \text{On a : } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\text{Donc : } D = ((2x - 1) - 2)((2x - 1)^2 + (2x - 1) \times 2 + 2^2)$$

$$D = (2x - 3)((2x)^2 - 4x + 1 + 4x - 2 + 4) = (2x - 3)(4x^2 + 3)$$

$$E = 27 + x^3 = 3^3 + x^3 = (3 + x)(3^2 - 3x + x^2)$$

$$\text{On a : } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$E = (3 + x)(9 - 3x + x^2)$$

$$F = (x^6)^2 - 2x^6 + 1 = (x^6)^2 - 2x^6 \times 1 + 1^2 = (x^6 - 1)^2$$

$$G = x^5 + x^3 - x^2 - 1 = x^3(x^2 + 1) - (x^2 + 1) = (x^3 - 1)(x^2 + 1)$$



Factoriser c'est écrire sous la forme d'un **produit**

$$H = x^3 + 1 + 2(x^2 - 1) - (x + 1) = x^3 + 1^3 + 2(x^2 - 1^2) - (x + 1)$$

$$H = (x + 1)(x^2 - x + 1^2) + 2(x + 1)(x - 1) - (x + 1)$$

$$H = (x + 1)(x^2 - x + 1 + 2(x - 1) - 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1 + 2x - 2 - 1)$$

$$H = (x + 1)(x^2 + x - 2)$$

Exercice: On considère l'expression suivante où x est un nombre quelconque :

$$F = (3x - 1)^2 - (3x - 1)(2x - 6)$$

1/Développer puis réduire F .

2/Factoriser F .

3/Développer puis réduire l'expression de F obtenue au 2/.

Exercice :1. On considère l'expression : $G = (x - 3)^2 - (x - 1)(x - 2)$

a) Développer et réduire G .

b) Comment peut-on déduire, sans calculatrice, le résultat de $99997^2 - 99999 \times 99998$?

2. a) Factoriser l'expression : $H = (7x - 3)^2 - 9$

b) Calculer la valeur de H pour $x = \frac{1}{7}$