Evaluation diagnostique en mathématiques

I. Polynômes, équations/inéquations/systèmes, Ordre dans IR:

Exercice1 :

1. Résoudre dans IR l'équation $x^2+5x+4=0$
2. Vérifier que -1 est une racine du polynôme P tel que $P(x)=x^3+6x^2+9x+4$
3. Effectuer la division euclidienne de P sur le binôme $(x+1)$
4. En déduire une factorisation de P
5. Résoudre l'équation $P(x)=0$

Exercice2 :

I- Soient a et b deux réels tels que $a \succ 0$. On considère l'équation

(E) : $x \in IR$; $ax^2+bx-2=0$

1- Montrer que l'équation (E) admet deux solutions distinctes que l'on note x_1 et x_2

2- Montrer que les signes de x_1 et x_2 sont différents (sans les calculer)

3- Déterminer le réel b sachant que : $\frac{2}{x_1}+\frac{2}{x_2}=-7$

II- On pose $a=4$ et $b=-7$

1- a) Résoudre dans IR l'équation (E)

b) déduire une factorisation du trinôme $4x^2-7x-2$

2- On considère le polynôme : $P(x)=4x^4+8x^3-3x^2-7x-2$

a) Vérifier que : $P(x)=4(x^2+x)^2-7(x^2+x)-2$

b) Résoudre dans IR l'équation : $P(x)=0$

3- Trouver deux polynômes $Q(x)$ et $H(x)$ de degré 2 tels que $P(x)=Q(x)\times H(x)$

4- Résoudre dans IR l'inéquation : $P(x)\succ 0$

Exercice 3 :

1)- Résoudre l'équation suivante dans son domaine de définition : $\frac{-x+1}{2x+3}-\frac{3x-1}{1-x}=\frac{2x+1}{(2x+3)(1-x)}$

2)- Résoudre dans IR l'équation : $x^2-2x-3=0$ puis en déduire la résolution des équations suivantes:

1- $x-2\sqrt{x}-3=0$
2- $x^2-2|x|-3=0$
3- $x^4-2x^2-3=0$
4- $\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}-3=0$

3)- Discuter selon les valeurs du réel m la résolution de l'équation : $(2m^2+1)x^2-x=mx$; $x\in IR$

Exercice 4 :

1)- Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1- $\frac{x}{3}-\frac{x+1}{x}\prec\frac{-7+x}{3x}$
2- $\left|3x+\frac{1}{3}\right|\leq\frac{1}{9}$
3- $\left|-\frac{2}{5}x+\frac{5}{4}\right|\succ 10$
4- $|x+1|+|x^2-1|\leq 0$

2)- Discuter selon les valeurs du réel m la résolution de l'inéquation : $m\left(mx+\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}x\geq 1$; $x\in IR$

3)- Résoudre dans IR l'inéquation suivante : $\frac{x^3-8}{x^4-9}\succ 0$

Exercice 5 : Considérons le polynôme : $P(x)=x^3-\left(3\sqrt{3}+1\right)x^2+m\left(2+\sqrt{3}\right)x-6$

1- Déterminer m pour que -2 soit une racine de P.
2- Déterminer m pour que P soit divisible par $(x-1)$
3- Posons : $m=3$;
 a)- déterminer $Q(x)$ tel que $P(x)=(x-1)Q(x)$
 b)- vérifier que $\sqrt{3}$ est une racine de P ; puis factoriser $P(x)$.

Exercice 6 : Soit $n\in IN^*$, on considère le polynôme : $P(x)=(x-2)^{3n}+(x-1)^{2n}-1$

1- Montrer qu'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x)=(x-2)Q(x)$ puis déterminer $d°(Q)$

2- Calculer $P(1)$ en fonction de n ; puis en déduire les valeurs de n pour que $P(x)$ soit divisible par $(x-1)$

3- Supposons que $n=1$; montrer que $P(x)=(x-2)\left((x-a)^2+b\right)$ avec a et b deux réels à déterminer.

Exercice7:

1- Déterminer un polynôme $P(x)$ de degré 2 tel que $P(x+1)-P(x)=x$ et qui s'annule en 0.

2- Soit $n \in IN$; déduire de ce qui précède la valeur de la somme $1+2+3+...+n$ en fonction de n.

Exercice8: a et b deux nombres réels tels que $-1 \le a \le \frac{1}{3}$ et $1 \le b \le 4$

Encadrer les nombres suivants : $3a+b$; $a-b$; $(3a-1)b$; ab

Exercice9: On pose $A=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ Calculer A^2 puis en déduire que $A=-1$

Exercice10: Résoudre dans IR^2 les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 3x-y=5 \\ x+y=7 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x-3y=0 \\ x+2y=1 \end{cases}$$

Exercice11:

Dans une ferme, on a des poules et des lapins.

Sachant qu'on a 76 pâtes et 24 têtes, calculer le nombre de lapins.

II. Trigonométrie :

Exercice12: Soit un $R(O;I;J)$ repère orthonormé tel que $OI=OJ=2cm$

1. Représenter dans le cercle trigonométrique les points suivants en déterminant l'abscisse curviligne principal $A\left(\frac{29\pi}{6}\right)$ et $B\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$
2. En déduire le calcul de $\sin\left(\frac{29\pi}{6}\right)$ et $\cos\left(\frac{29\pi}{6}\right)$

3. Représenter le point $E(\alpha)$ sachant que $\tan(\alpha)=\frac{1}{2}$ et $\alpha \in \left]\pi;\frac{3\pi}{2}\right[$
4. Déterminer le couple des coordonnées du point E dans $R(O;I;J)$

Exercice13:

1. Vérifier que $\frac{7\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$ et $\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$
2. En déduire que $\sin^2(\frac{3\pi}{8})+\sin^2(\frac{7\pi}{8})=1$

Exercice14: Soit α tel que $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ et $\sin\alpha+\cos\alpha=0$

1. Montrer que $\sin\alpha.\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ puis en déduire le calcul $\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}$
2. Déterminer le signe de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ puis en déduire le calcul de $\sin\alpha-\cos\alpha$
3. Calculer $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ puis en déduire la valeur de α

Exercice15:

1. Résoudre dans IR $\cos(x)=\sqrt{5}$
2. Résoudre dans $]-\pi;2\pi]$ l'équation $\sqrt{2}\sin x=1$
3. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ la double inégalité $0\leq 2\cos x\leq 1$ en représentant les solutions dans le cercle trigonométrique en utilisant un crayon vert.

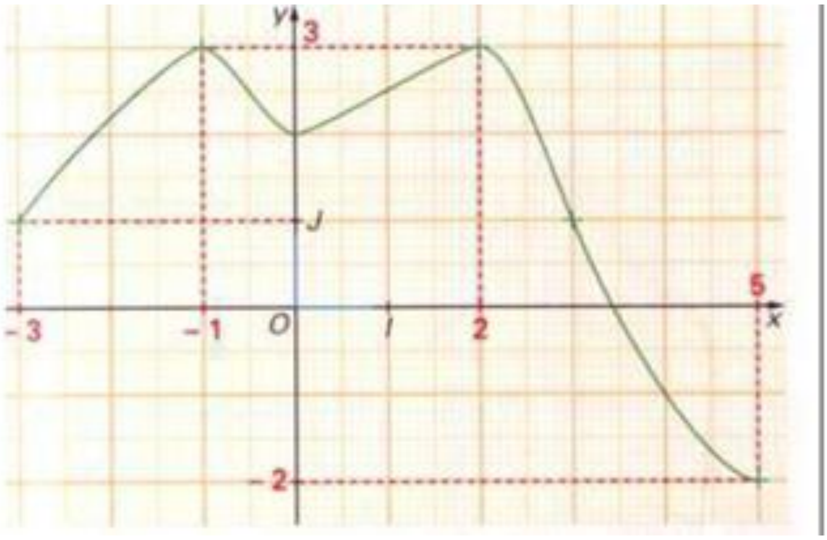
III. Etude des fonctions numériques :

Exercice16 :

f une fonction numérique représentée graphiquement dans le repère figurant dans la page suivante

1. Déterminer graphiquement D le domaine de définition de f
2. Déterminer graphiquement; $f(0)$; $f(-1)$; $f(5)$; $f(2)$
3. Déterminer les antécédents de 1 et ceux de 4
4. Déterminer le nombre des antécédents de 2

5. Déterminer le nombre des solutions de l'équation $f(x)=0$
6. Dessiner le tableau des variations de la fonction f
7. Déterminer les valeurs maximales et minimales de f sur D



Exercice17 :

Soit f une fonction numérique telle que $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

1. Déterminer D le domaine de définition de f
2. Calculer $f(1)$; $f(2)$; $f(\frac{1}{2})$
3. Soit $x\in D$, écris $f(-x)$ en fonction de $f(x)$
4. En déduire la parité de f
5. Soient x et y deux éléments distincts de D ; calculer $T(x\,;y)$ le taux des variations de f
6. En déduire les variations de f sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$