|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***Nom :*** ------------------------------- | *Les suites numériques* | ***Pr. LATRACH Abdelkbir***  |

1. ***Généralité :***
2. *Définition :*

***Définition :***

Soit $I$ une partie de $N$.

Une suite numérique $u$ est une fonction de $I$ dans $R$.

On note l’image d’un nombre $n$ par $u\_{n}$ et on note la suite $u$ par $\left(u\_{n}\right)\_{n\in I}$.

**🔾 *Exemple ➀ :***

On considère la suite $\left(u\_{n}\right)\_{n\in N}$ définie par :

 $\left(∀n\in N\right): u\_{n}=3n+1$.

* $u\_{0}=$-----------------------------------------------------
* $u\_{3}=$-----------------------------------------------------
* $u\_{7}=$-----------------------------------------------------

**🔾 *Exemple ➁ :***

On considère la suite $\left(u\_{n}\right)\_{n\in N}$ définie par :

$\left\{\begin{array}{c}\&u\_{0}=2\\\&u\_{n+1}=2u\_{n}-1\end{array}\right.$.

* $u\_{1}=$-----------------------------------------------------
* $u\_{2}=$-----------------------------------------------------
* $u\_{3}=$-----------------------------------------------------
1. *Nombre de termes consécutifs d’une suite :*

***Propriété :***

Soit $\left(u\_{n}\right)\_{n\in N}$ une suite numérique.

Le nombre des termes consécutifs $u\_{p},u\_{p+1},...,u\_{n}$ tel que $\left(p≺n\right)$ est :$ n-p+1$.

**🔾 *Exemple :***

Le nombre des termes consécutifs de $u\_{4}$ à $u\_{44}$ est :

$44-4+1=41$*.*

1. ***Suite arithmétique :***
2. *Définition :*

*Définition :*

Soient $\left(u\_{n}\right)$ une suite numérique et $r$ un nombre réel.

On dit que $\left(u\_{n}\right)$ est une suite ***arithmétique*** si et seulement si $\left(∀n\in I\right):u\_{n+1}-u\_{n}=r$.

* Le nombre $r$ est appelé **la raison** de la suite $\left(u\_{n}\right)$.

🔾 ***Exemple ➀:***

Vérifions si la suite $\left(u\_{n}\right)$ définie par :

 $\left(∀n\in N\right): u\_{n}=2n+3$ est arithmétique.

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

🔾 ***Exemple ➁:***

Vérifions si que la suite $\left(u\_{n}\right)$ définie par :

 $\left(∀n\in N\right): u\_{n}=-\frac{3}{2}n+1$ est arithmétique.

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

🔾 ***Exemple ➂:***

Vérifions si la suite $\left(u\_{n}\right)$ définie par :

 $\left(∀n\in N\right): u\_{n}=2^{n}$ est arithmétique.

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

1. *Terme général d’une suite arithmétique :*

***Propriété :***

Soit $\left(u\_{n}\right)\_{n\in I}$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u\_{p}$ .

Le terme général de la suite $\left(u\_{n}\right)$ est :

$\left(∀n\in I\right):u\_{n}=u\_{p}+(n-p)×r$.

🔾 ***Remarque :***

Si le premier terme d’une suite arithmétique est $u\_{0}$, alors le terme général de la suite $\left(u\_{n}\right)$ est :

$$\left(∀n\in N\right):u\_{n}=u\_{0}+n×r$$

🔾 ***Exemple ➀:***

Soit $\left(u\_{n}\right)\_{n\in N}$ une suite arithmétique de raison $r=\frac{1}{2}$ telle que $u\_{2}=4$.

Déterminons le terme général de la suite $\left(u\_{n}\right)\_{n\in N}$.

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

🔾 ***Exemple ➁:***

Soit $\left(u\_{n}\right)\_{n\in N}$ une suite arithmétique tel que $u\_{0}=-2$ et $u\_{4}=7$.

Déterminons la raison de la suite $\left(u\_{n}\right)\_{n\in N}$.

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

1. *Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique*

***Propriété :***

Soit $\left(u\_{n}\right)$ une suite arithmétique et soit la somme : $S=u\_{p}+u\_{p+1}+...+u\_{n} $.

On a : $S=(n-p+1)×\left(\frac{u\_{p}+u\_{n}}{2}\right) $.

🔾 ***Exemple :***

Soit $\left(u\_{n}\right)$ une suite arithmétique tel que $u\_{1}=-1$ et $u\_{10}=28$.

On a : $S=u\_{1}+u\_{2}+...+u\_{10} $

 = ------------------------------------------------

 = ------------------------------------------------

 = ------------------------------------------------

***? Application :***

On considère la suite $\left(u\_{n}\right)\_{n\in N}$ définie par :

$$\left(∀n\in N\right): u\_{n}=4n+15$$

1. Montrer que $\left(u\_{n}\right)\_{n\in N}$est une suite arithmétique.
2. Est-ce-que $2021$ est un terme de la suite $\left(u\_{n}\right)\_{n\in N}$?
3. Calculer $S=u\_{0}+u\_{1}+......+u\_{20}$.

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

1. ***Suite géométrique***
2. *Définition :*

*Définition :*

Soient $\left(u\_{n}\right)$ une suite numérique et $q$ un nombre réel.

On dit que $\left(u\_{n}\right)$ est une suite **géométrique** si et seulement si $\left(∀n\in I\right):u\_{n+1}=qu\_{n}$.

* Le nombre $q$ est appelé **la raison** de la suite $\left(u\_{n}\right)$.

🔾 ***Exemple ➀:***

Vérifions si la suite $\left(u\_{n}\right)$ définie par :

 $\left(∀n\in N\right): u\_{n}=2^{n}$ est géométrique.

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

🔾 ***Exemple ➁:***

Vérifions si que la suite $\left(u\_{n}\right)$ définie par :

 $\left(∀n\in N\right): u\_{n}=4×3^{2n+1}$ est géométrique.

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

🔾 ***Exemple ➂:***

Vérifions si que la suite $\left(u\_{n}\right)$ définie par :

 $\left\{\begin{array}{c}\&u\_{0}=2\\\&u\_{n+1}=4u\_{n};n\in N\end{array}\right.$ est géométrique.

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

1. *Terme général d’une suite géométrique :*

***Propriété :***

Soit $\left(u\_{n}\right)\_{n\in I}$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u\_{p}$ .

Le terme général de la suite $\left(u\_{n}\right)$ est :

$\left(∀n\in I\right):u\_{n}=u\_{p}×q^{n-p}$.

🔾 ***Remarque :***

Si le premier terme d’une suite géométrique est $u\_{0}$, alors le terme général de la suite $\left(u\_{n}\right)$ est :

$$\left(∀n\in N\right):u\_{n}=u\_{0}×q^{n}$$

🔾 ***Exemple :***

Soit $\left(u\_{n}\right)\_{n\in N}$ une suite géométrique de raison $q=2$ tel que $u\_{1}=4$.

Déterminons le terme général de la suite $\left(u\_{n}\right)\_{n\in N}$.

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

1. *La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique*

***Propriété :***

Soit $\left(u\_{n}\right)$ une suite géométrique de raison $q$ tel que $q\ne 1$ et soit la somme $S=u\_{p}+u\_{p+1}+...+u\_{n} $.

On a : $S=u\_{p}×\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$.

***? Application :***

Soit $\left(v\_{n}\right)$ une suite numérique définie par : $\left(∀n\in N\right):v\_{n}=\frac{3^{n}}{2}$.

1. Calculer $v\_{0}$ et $v\_{8}$.
2. Montrer que $\left(v\_{n}\right)$ est une suite géométrique de raison $3$.

***Résumé***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Suite arithmétique*** | ***Suite géométrique*** |
| ***Définition*** | $$U\_{n+1}=U\_{n}+r$$ | $$U\_{n+1}=qU\_{n}$$ |
| ***Terme général*** | $$U\_{n}=U\_{p}+\left(n-p\right)r$$$$\left(p\leq n\right)$$ | $$U\_{n}=U\_{p}×q^{\left(n-p\right)}$$$$\left(p\leq n\right)$$ |
| ***Somme de termes successives*** | $$S\_{n}=U\_{p}+U\_{p+1}+…+U\_{n}$$$$=\left(\frac{n-p+1}{2}\right)\left(U\_{p}+U\_{n}\right)$$ | $$S\_{n}=U\_{p}+U\_{p+1}+…+U\_{n}$$$$=U\_{p}×\frac{(1-q^{\left(n-p+1\right)})}{1-q}$$ |
| $a$***,*** $b$ ***et*** $c$ ***trois termes successives*** | $$2b=a+c$$ | $$b²=ac$$ |

1. Calculer : $S=v\_{0}+v\_{1}+...+v\_{8}$.

-----------------------------------------------------------------

 ------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

***Pr. LATRACH Abdelkbir***

***? Exercice ➀:***

On considère $\left(u\_{n}\right)\_{n\in N}$ une suite arithmétique de raison $r=3$ telle que $u\_{0}=\frac{1}{2}$ .

1. Calculer $u\_{1}$ et $u\_{10}$.
2. Ecrire $u\_{n}$ en fonction de $n$.
3. Vérifier que $\frac{301}{2}$ est un terme de la suite $\left(u\_{n}\right)\_{n\in N}$.
4. Calculer la somme suivante :$ S=u\_{0}+u\_{1}+...+u\_{50}$

***? Exercice ➁:***

On considère la suite $\left(u\_{n}\right)\_{n\in N}$définie par :

$\left(∀n\in N\right):u\_{n}=-3×2^{n}$ .

1. Calculer $u\_{0}$ et $u\_{10}$.
2. Montrer que $\left(u\_{n}\right)\_{n\in N}$ est une suite géométrique en déterminant sa raison.
3. Calculer la somme suivante :$ S=u\_{0}+u\_{1}...+u\_{10}$