Professeur : RACHID FANIDI L'année Scolaire :2020-2021 Lycée AL Massira EL Khadraa Tiznit	Calcul Intégral - Série 08 - 2BAC SP-SVT BIOF	المديرية الإقليمية بتيزنيت الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة سوس ماسة

EXERCICE 01

Calcul intégral par primitive

Calculer les intégrales suivantes:

$$I_1=\int_{-1}^{1}(2x^3-5x^2+2)dx \text{ et } I_2=\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)dx$$

$$I_3=\int_{0}^{1}\left(x\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}\right)dx \text{ et } I_4=\int_{1}^{4}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-x^2\right)dx$$

$$I_5=\int_{0}^{-1}\frac{2}{3x+4}dx \text{ et } I_6=\int_{0}^{1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$I_7=\int_{0}^{1}2x(x^2-7)^7\,dx \text{ et } I_8=\int_{1}^{e}\frac{1}{x}ln^2x\,dx$$

$$I_9=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}cosx.sin^5x\,dx \text{ et } I_{10}=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}-7sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)dx$$

$$I_{11}=\int_{e}^{e^2}\frac{-3}{xln^2x}dx \text{ et } I_{12}=\int_{-1}^{0}(e^x-4e^{2x})\,dx$$

$$I_{13}=\int_{1}^{2}\frac{lnx}{(xlnx-x)^4}dx \text{ et } I_{14}=\int_{1}^{2}\frac{x-1}{(x^2-2x+2)^4}dx$$

$$I_{15}=\int_{1}^{e^2}\frac{1}{x\sqrt{1+lnx}}dx \text{ et } I_{16}=\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{5x+4}}dx$$

$$I_{17}=\int_{0}^{ln2}\frac{e^{-3x}}{\sqrt{1+e^{-3x}}}dx \text{ et } I_{18}=\int_{-1}^{1}x\sqrt[3]{2+2x^2}\,dx$$

$$I_{19}=\int_{0}^{1}\frac{1-e^{2x}}{e^x-2x}dx \text{ et } I_{20}=\int_{e}^{e^2}\frac{1}{xlnx}dx$$

$$I_{21}=\int_{0}^{1}(1-x)e^{x^2-2x+3}\,dx \text{ et } I_{22}=\int_{0}^{\sqrt{2}}xe^{-3x^2+7}\,dx$$

$$I_{23}=\int_{1}^{2}\frac{x^2+5x+5}{x+3}dx \text{ et } I_{24}=\int_{0}^{1}\frac{2x^2-5}{(x-2)(x+1)}dx$$

EXERCICE 02

Application de relation de chasles

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1=\int_{-1}^{3}|x-2|\,dx \text{ et } I_2=\int_{0}^{\pi}|cosx|\,dx$$

$$I_3=\int_{-1}^{2}|x^2-x|\,dx \text{ et } I_4=\int_{-2}^{3}|-2x^2+2x+4|\,dx$$

$$I_5=\int_{-2}^{1}(|2x-1|+|x+1|)\,dx \text{ et } I_6=\int_{-1}^{1}|e^{2x}-1|\,dx$$

EXERCICE 03

1) Déterminer les reels a, b et c tels que:

$$(\forall x\in\mathbb{R}-\{2\});\ \frac{x^2-3x+1}{x-2}=ax+b+\frac{c}{x-2}$$

2) Calculer l'intégrale:

$$\int_{0}^{1}\frac{x^2-3x+1}{x-2}dx$$

EXERCICE 04

1) Déterminer les reels a, b; c et d tels que:

$$(\forall x\in\mathbb{R});\ \frac{2x^3+x^2-3x+4}{x^2-x+1}=ax+b+\frac{cx+d}{x^2-x+1}$$

2) Calculer l'intégrale:

$$\int_{0}^{1}\frac{2x^3+x^2-3x+4}{x^2-x+1}dx$$

EXERCICE 05

Intégration par parties

1)En utilisant une intégration par Partie, Calculer les intégrales suivantes:

$$I_1=\int_{0}^{1}xe^x\,dx \text{ et } I_2=\int_{0}^{\frac{1}{3}}(4x-1)e^{3x}$$

$$I_3=\int_{1}^{e}lnx\,dx \text{ et } I_4=\int_{e}^{e^2}xlnx\,dx$$

$$I_5=\int_{-1}^{0}ln(x+3)\,dx \text{ et } I_6=\int_{e}^{e^2}\frac{lnx}{\sqrt{x}}dx$$

$$I_7=\int_{1}^{e}\frac{lnx}{x^2}dx \text{ et } I_8=\int_{1}^{e}ln^2x\,dx$$

$$I_9=\int_{0}^{ln2}\frac{x+1}{e^{2x}}dx \text{ et } I_{10}=\int_{1}^{e}x^2lnx\,dx$$

$$I_{11}=\int_{1}^{2}(2x+3)lnx\,dx \text{ et } I_{12}=\int_{0}^{1}(2x-1)e^x\,dx$$

$$I_{13}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}xsin(2x)\,dx \text{ et } I_{14}=\int_{0}^{\pi}xcosx\,dx$$

$$I_{15}=\int_{-1}^{2}ln(3x+4)\,dx \text{ et } I_{16}=\int_{0}^{3}x\sqrt{x+1}\,dx$$

$$I_{17}=\int_{0}^{ln3}e^{-x}ln(1+e^x)\,dx$$

2) En utilisant une double intégration par parties, Calculer les intégrales suivantes:

$$I_{18} = \int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx \text{ et } I_{19} = \int_1^e x(lnx)^2\,dx$$

$$I_{20} = \int_0^{\pi} e^x cosx\,dx \text{ et } I_{21} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 sinx\,dx$$

EXERCICE 06

1)a-Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 0\}$:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

b-Calculer l'intégrale :

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,dx$$

2) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^2 \frac{ln(1+x)}{x^2}\,dx = 3ln2 - \frac{3}{2}ln3$$

EXERCICE 07

1) a-Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{(1+e^x)^2} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

b- Calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx$$

2) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}\,dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{2}ln(1+e) - \frac{1}{2(1+e)^2}$$

EXERCICE 08

Comparer les intégrales I et J sans les calculer dans chacun des cas suivants :

1) $I = \int_1^2 xe^x\,dx$ et $J = \int_1^2 x^2e^x\,dx$

2) $I = \int_{\frac{1}{e}}^1 xlnx\,dx$ et $J = \int_1^{\frac{1}{e}} lnx\,dx$

3) $I = \int_e^{e^2} e^{-x}.ln^2x\,dx$ et $J = \int_e^{e^2} e^{-x}lnx\,dx$

EXERCICE 09

Intégration et ordre

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$1 \leq \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx \leq 2$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}ln2 \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{x}\,dx \leq ln2$$

$$1 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e-1 \left(rappel\ \forall x \in [0,1]: 0 \leq x^2 \leq x \right)$$

$$2ln3 \leq \int_2^4 ln(x^2-1)\,dx \leq 2ln3 + 2ln5$$

EXERCICE 10

1)a- Montrer que:

$$(\forall t \in \mathbb{R}^+), 1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$$

b- En déduire que:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+), x - \frac{x^2}{2} \leq ln(1+x) \leq x$$

2) Déterminer un encadrement de l'intégrale

$$I = \int_0^1 ln(1+x)\,dx$$

EXERCICE 11

On considère les intégrales suivantes:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx\ ; J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$$

$$K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$$

1) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$$

a- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b- En Déduire la valeur de l'intégrale I.

2) a- Vérifier que: $J + 2I = K$.

b-En utilisant une integration par parties, Montrer que: $K = \sqrt{3} - J$.

c- En déduire la valeur des intégrales J et K.

EXERCICE 12

Session rattrapage 2010

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$par:

$$f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + lnx}{x^2}$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1cm$

1) Montrer, en utilisant une integration par Partie que:

$$\int_1^e \frac{lnx}{x^2}\,dx = 1 - \frac{e}{2}$$

2) Montrer que l'aire du Domaine plan limite par (C_f), la droite (D): $y = x - 1$ el les droites d'équations: $x = 1$ et $x = e$ est: $\left(1 - \frac{1}{e}\right) cm^2$.

EXERCICE 13

Session Normale 2013

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = (x-2)^2 e^x$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1cm$

1) Montrer que $H: x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction : $x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$, puis Calculer

$$\int_0^1 xe^x\,dx$$

2) Montrer, en utilisant une integration par Partie que:

$$\int_0^1 x^2 e^x\,dx = e-2$$

3) Montrer que l'aire du Domaine plan limite par (C_f), L'axe des abscisses et les droites d'équations: $x=0$ et $x=1$ est: $5(e-2)cm^2$.

EXERCICE 14

Session Normale 2014

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par:

$$f(x) = (1+lnx)^2 + \frac{1}{x^2}$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1cm$

On considère les intégrales I et J définies par:

$$I = \int_1^e (1+lnx)\,dx \text{ et } J = \int_1^e (1+lnx)^2\,dx$$

1) Montrer que $H: x \mapsto xlnx$ est une fonction primitive de la fonction $h: x \mapsto 1+lnx$ sur $]0;+\infty[$, puis en déduire que $I = e$.

2) En utilisant une integration par parties, Montrer que: $J = 2e-1$.

3) Calculer en cm^2, l'aire du Domaine plan limite par (C_f), L'axe des abscisses et les droites d'équations: $x=1$ et $x=e$.

EXERCICE 15

Session Normale 2018

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = (x^2-x)e^{-x} + x$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1cm$

1) Montrer que $H: x \mapsto (x^2+2x+2)e^{-x}$ est une fonction primitive de la fonction $h: x \mapsto -x^2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$, puis en déduire que:

$$\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx = \frac{2e-5}{e}$$

2) En utilisant une integration par parties, Montrer que:

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx = \frac{e-2}{e}$$

3) Calculer en cm^2, l'aire du Domaine plan limite par (C_f), La droite $(D): y = x$ et les droites d'équations: $x=0$ et $x=1$.

EXERCICE 16

Session Normale 2018

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par:

$$f(x) = x + \left(1-\frac{2}{x}\right)lnx$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1cm$.

1) Montrer que:

$$\int_1^2 \frac{lnx}{x}\,dx = \frac{(ln2)^2}{2}$$

2) Montrer que $H: x \mapsto 2lnx - x$ est une fonction primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ sur $]0,+\infty[$.

3) Montrer, en utilisant une integration par Partie que:

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right)lnx\,dx = e-2$$

4)Calculer en cm^2, l'aire du Domaine plan limite par (C_f), La droite $(D): y = x$ et les droites d'équations: $x=1$ et $x=2$.

EXERCICE 17

Session normale 2010

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2cm$

1) Montrer, en utilisant une integration par Partie que:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}\,dx = 1 - \frac{e}{2}$$

2) Montrer que l'aire du Domaine plan limite par (C_f), la droite $(T): y = x$ el les droites d'équations: $x=0$ et $x=\frac{1}{2}$ est: $(6-2e)cm^2$.

EXERCICE 18

Soit f la fonction définie sur $]0;e[\cup]e;+\infty[$ par:

$$f(x) = \frac{1}{x(1-lnx)}$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1)Montrer que:

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-lnx)}\,dx = ln2$$

2) Calculer en cm^2, l'aire du Domaine plan délimité par (C_f), L'axe des abscisses et les droites d'équations: $x=1$ et $x=\sqrt{e}$.

EXERCICE 19

Session Rattrapage 2017

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = x + 1 - (x^2 + 1)e^x$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2cm$

1) Montrer que $H: x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h: x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$, puis en déduire que:

$$\int_{-1}^{0} xe^x\,dx = \frac{2}{e} - 1$$

2) En utilisant une integration par parties, Montrer que:

$$\int_{-1}^{0} (x^2+1)e^x\,dx = 3\left(1 - \frac{2}{e}\right)$$

3) Calculer en cm^2, l'aire du Domaine plan délimité par (C_f), la droite (D) d'équation $y = x + 1$ et les droites d'équations: $x = -1$ et $x = 0$.

EXERCICE 20

Session Normale 2012

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par:

$$f(x) = (x^2 - 1)lnx$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 3cm$.

1) Montrer que $H : x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$.

2) En utilisant une integration par parties, Montrer que:

$$\int_{1}^{2} (x^2 - 1)lnx\,dx = \frac{2}{9}(1 + 3ln2)$$

3) Calculer en cm^2, l'aire du Domaine plan délimité par (C_f), L'axe des abscisses et les droites d'équations: $x = 1$ et $x = 2$.

EXERCICE 21

Session Normale 2017

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par:

$$f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)lnx$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1cm$.

1) Montrer que:

$$\int_{1}^{2} \frac{lnx}{x}\,dx = \frac{(ln2)^2}{2}$$

2) Montrer que $H: x \mapsto 2lnx - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ sur $]0;+\infty[$.

3) En utilisant une integration par parties, Montrer que:

$$\int_{1}^{2} \left(\frac{2}{x} - 1\right) lnx\,dx = (1 - ln2)^2$$

4) Calculer en cm^2, l'aire du Domaine plan délimité par (C_f), la droite (D) d'équation $y = x$ et les droites d'équations: $x = 1$ et $x = 2$.

EXERCICE 22

Session Rattrapage 2014

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = (xe^x - 1)e^x$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1) En utilisant une integration par parties, Montrer que:

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} xe^{2x}\,dx = \frac{1}{4}$$

2) Calculer en cm^2, l'aire du Domaine plan délimité par (C_f), L'axe des abscisses et les droites d'équations: $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 23

1)a-Vérifier que $H : x \mapsto \frac{e^{3x}}{3} - \frac{3}{2}e^{2x} + 3e^x - x$ est une primitive de la fonction $h: x \mapsto (e^x - 1)^3$ sur $\mathbb{R}$.

b-En déduire que:

$$\int_{0}^{ln2} (e^x - 1)^3\,dx = \frac{5}{6} - ln2$$

2) En utilisant une integration par parties, Calculer L'intégrale:

$$I = \int_{0}^{ln2} 3xe^x(e^x - 1)^2\,dx$$

EXERCICE 24

Le plan est rapport à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ Dans chacun des cas suivants, Calculer le volume du solide engendrée par la rotation de la courbe (C_f) un tour complet autour de l'axe des abscisses sur I .

1) $f(x) = \sqrt{x + 2e^{4x}}$ et $I = [0;1]$

2) $f(x) = \sqrt{x^2 lnx}$ et $I = [1;e]$

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{xlnx}}$ et $I = [e;e^2]$

4) $f(x) = \sqrt{sinx}.cosx$ et $I = \left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$