Sommaire

I. Branches infinies

Dans tout ce qui suit, f désigne une fonction numérique et D_f est sa domaine de définition et (C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Droites asymptotiques

a. Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées

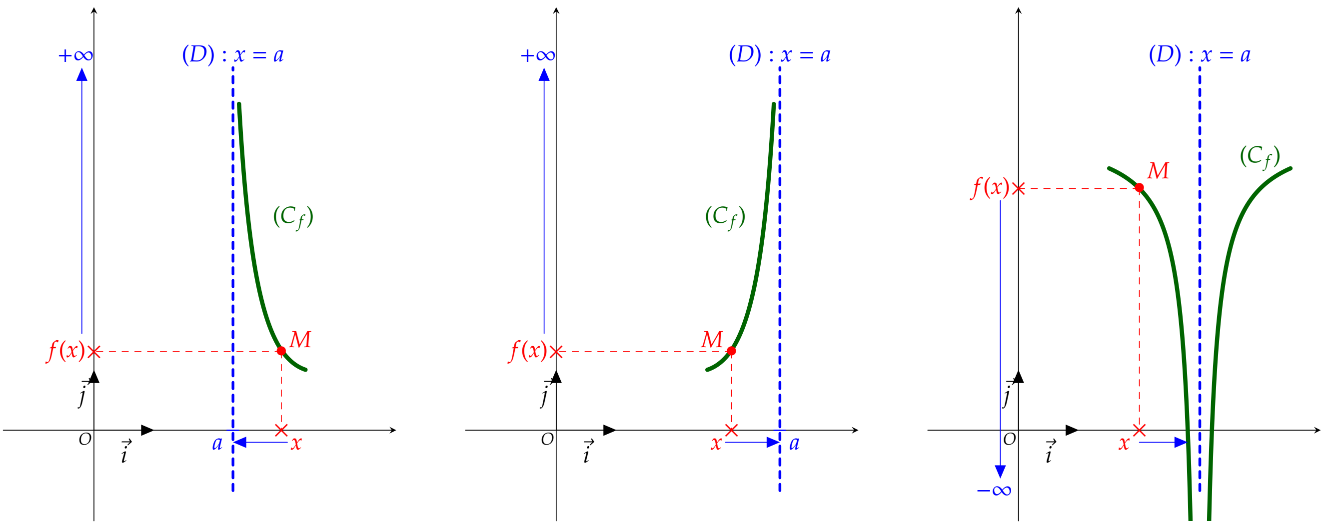
Définition

Soit a un réel.
On dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote (verticale) à la courbe (C_f), si :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty \quad ou \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty \quad ou \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty \quad ou \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$$

Remarque

Une asymptote verticale est une une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées



$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ par : $\quad f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

1. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x)$ e t$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x)$. En déduire que la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote de (C_f).
2. Montrer que la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote de (C_f).

b. Asymptote parallèle à l'axe des abscisses

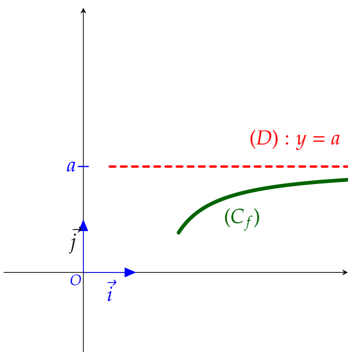
Définition

Soit a un réel.
On dit que la droite d'équation $y = a$ est une asymptote (horizontale) à la courbe (C_f), si :

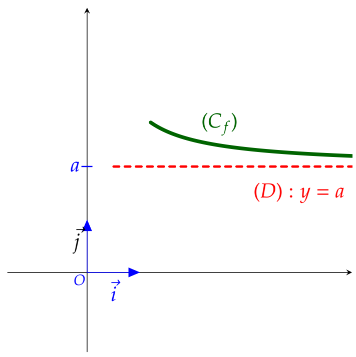
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

Remarque

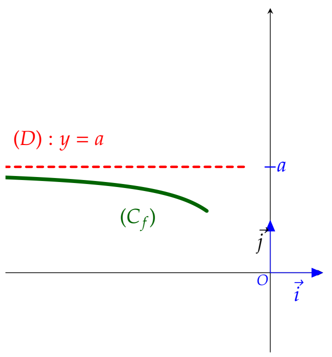
1. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, on dit aussi que la droite d'équation $y = a$ est une asymptote à (C_f) au voisinage ∞.
2. Si la droite $(D) : y = a$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f), pour étudier la position relative de (C_f) par rapport à (D), il suffit d'étudier le signe de $[f(x) - y]$.



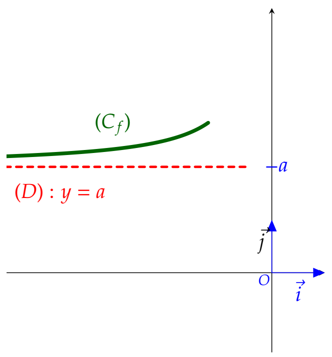
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad f(x) = -\dfrac{(x-1)^2}{2x^2+5}$

1. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$ est une asymptote de (C_f) au voisinage $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que (C_f) est au dessus de (D) sur $[1; +\infty]$, et au dessous de (D) sur $]-\infty; -1]$.

c. Asymptote oblique

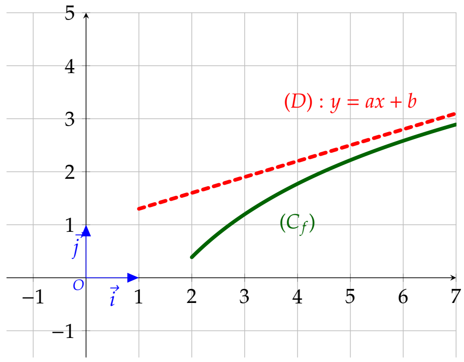
Définition

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$.
On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote (oblique) à la courbe (C_f), si :

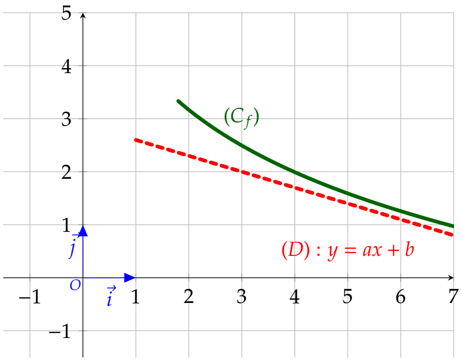
$$\lim_{x\to+\infty}\Big[f(x)-(ax+b)\Big]=0 \quad ou \lim_{x\to-\infty}\Big[f(x)-(ax+b)\Big]=0$$

Remarque

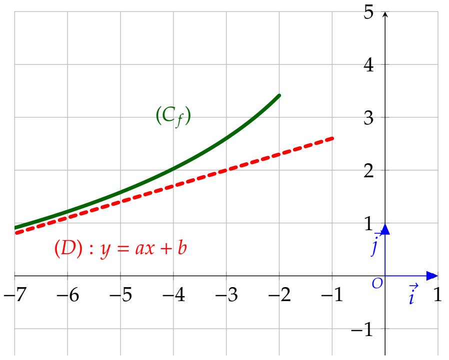
Soit la droite (D) : $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f), pour étudier la position relative de (C_f) par rapport à (D), il suffit d'étudier le signe de $[f(x) - y]$.



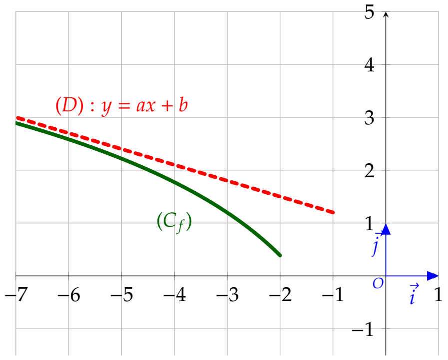
$$\lim_{x\to+\infty}\Big[f(x)-(ax+b)\Big]=0$$



$$\lim_{x\to+\infty}\Big[f(x)-(ax+b)\Big]=0$$



$$\lim_{x\to-\infty}\Big[f(x)-(ax+b)\Big]=0$$



$$\lim_{x\to-\infty}\Big[f(x)-(ax+b)\Big]=0$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad f(x) = -3x - 1 + \dfrac{1}{x^2+1}$

1. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -3x - 1$ est une asymptote à (C_f) au voisinage $-\infty$.
2. Étudier la position relative de (C_f) par rapport à (D).

La propriété suivante offre une manière pratique de déterminer une asymptote oblique.

Propriété

La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) si et seulement si :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \quad \left(resp.\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a\right).$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - ax\right] = b \quad \left(resp.\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = b\right).$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad f(x) = \sqrt{x^2+1}$

1. Montrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique au voisinage $+\infty$ que l'on précisera.
2. Montrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique au voisinage $-\infty$ que l'on précisera.

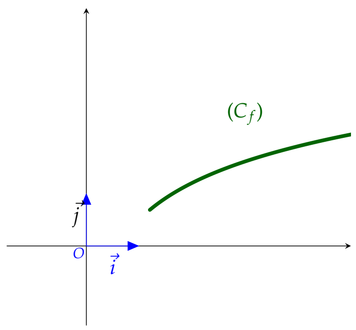
2. Directions asymptotiques

a. Branche parabolique de direction l'axe des abscisses

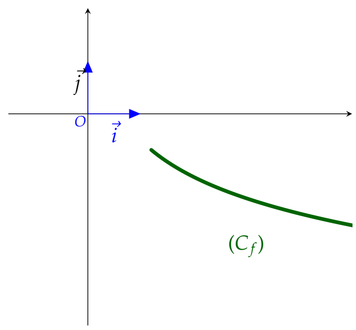
Définition

On dit que la courbe (C_f) présente une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage l'infini (∞), si :

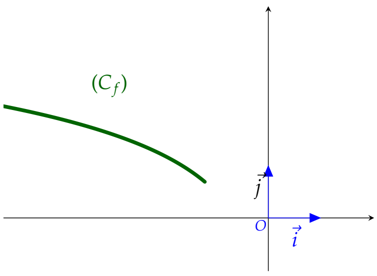
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty \quad \left(resp.\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty\right).$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \quad \left(resp.\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0\right).$



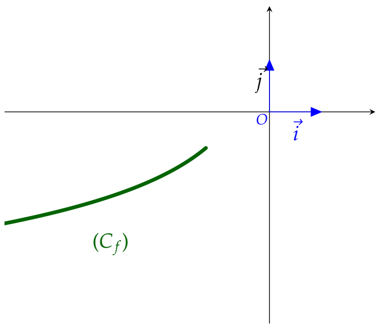
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;1]$ par : $f(x) = \sqrt{1-x}$

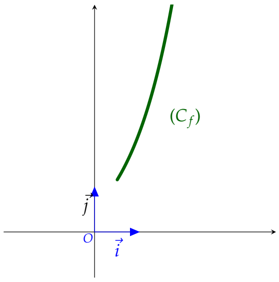
Montrer que (C_f) présente une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage $-\infty$.

b. Branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

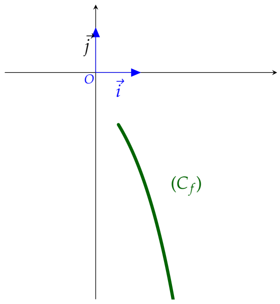
Définition

On dit que la courbe (C_f) présente une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage l'infini (∞), si :

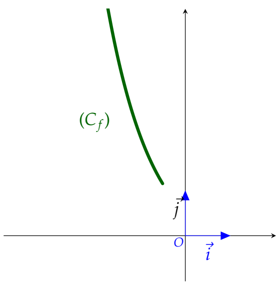
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty \quad \left(resp.\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty\right)$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty \quad \left(resp.\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty\right)$.



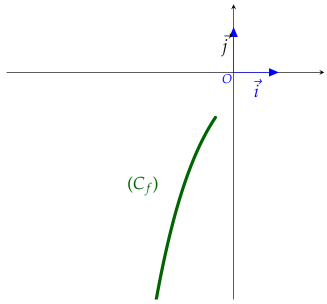
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;1]$ par : $f(x) = 3 + \sqrt{x} + \dfrac{x}{2}$

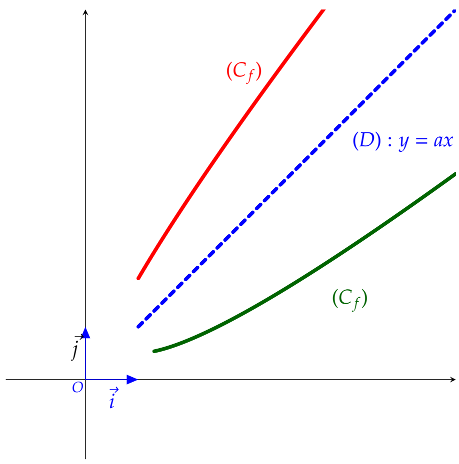
Montrer que (C_f) présente une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage $+\infty$.

c. Branche parabolique de direction de la droite $y = ax$

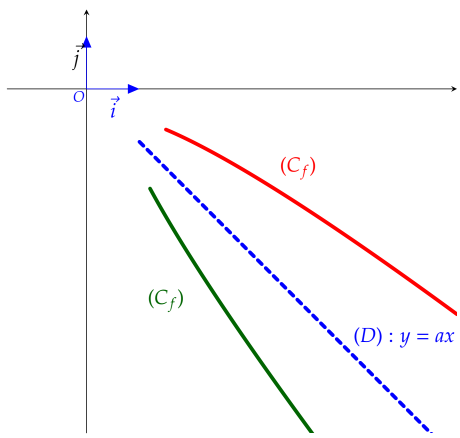
Définition

Soit a un réel non nul.
On dit que la courbe (C_f) présente une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$ au voisinage l'infini (∞), si :

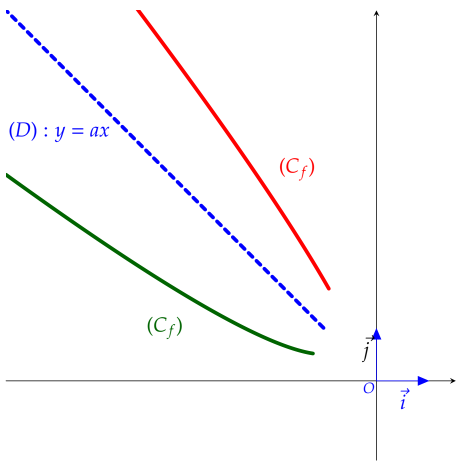
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty \quad \left(resp.\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty\right)$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \quad \left(resp.\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a\right)$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - ax\right] = \pm\infty \quad \left(resp.\ \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty\right)$.



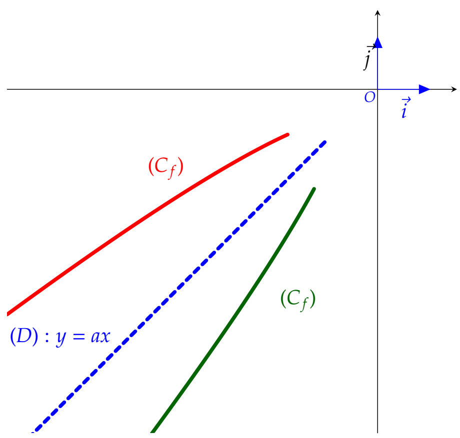
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{2x-2} + \dfrac{x}{2}$

Montrer que (C_f) présente une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$ au voisinage $+\infty$.

II. Éléments de la symétrie d'une courbe

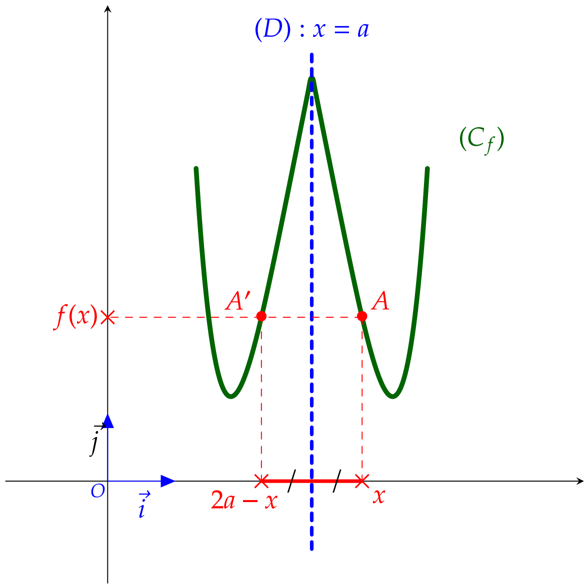
1. Axe de symétrie

Propriété

Soit a un réel.
On dit que la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f), si et seulement si pour tout x de D_f on a :

1. $2a - x \in D_f$.
2. $f(2a-x) = f(x)$.

Cas particulier :
Si $a = 0$ alors le centre de symétrie est l'axe des ordonnées (Oy) ; c'est le cas d'une fonction paire.



Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$: $2 - x \neq 1$.
2. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$: $f(2-x) = f(x)$.
3. Déduire que la droite $(D) : x = 1$ est l'axe de symétrie de la courbe (C_f).

2. Centre de symétrie

Propriété

Soient a et b deux réels.
On dit que le point $A(a; b)$ est centre de symétrie de la courbe (C_f), si et seulement si pour tout x de D_f on a :

1. $2a - x \in D_f$.
2. $f(2a - x) = 2b - f(x)$.

Cas particulier : Si $a = b = 0$ alors le centre de symétrie est l'origine O du repère ; c'est le cas d'une fonction impaire.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ par : $\quad f(x) = \dfrac{x-1}{2x+1}$

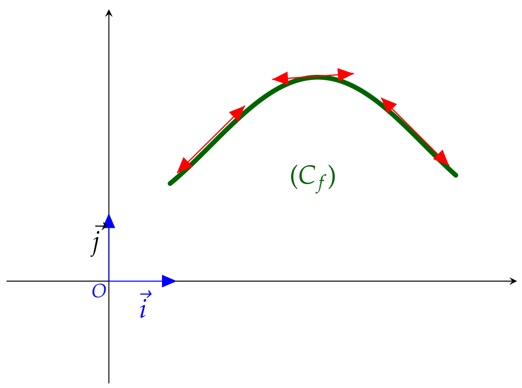
1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$: $\quad -1 - x \neq \dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$: $\quad f(-1-x) = 1 - f(x)$.
3. Déduire que le point $A\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f).

III. Convexité d'une courbe

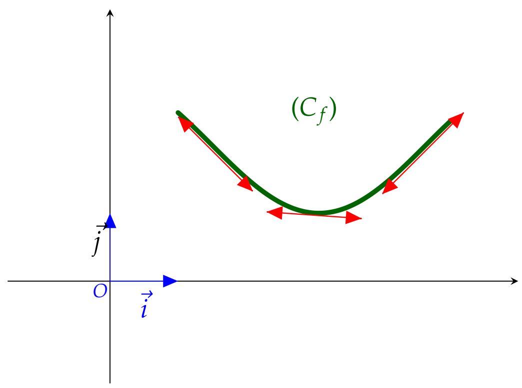
1. Convexité - Concavité

Définition

1. On dit que la courbe (C_f) est convexe, si (C_f) est au-dessous de toutes ses tangentes.
2. On dit que la courbe (C_f) est concave, si (C_f) est au-dessus de toutes ses tangentes.



La courbe (C_f) est convexe



La courbe (C_f) est concave

Propriété

Soit f une fonction dérivable deux fois sur un intervalle I.

1. La courbe (C_f) est convexe sur I, si pour x de I : $f''(x) \leq 0$.
2. La courbe (C_f) est concave sur I, si pour x de I : $f''(x) \geq 0$.

Exemple

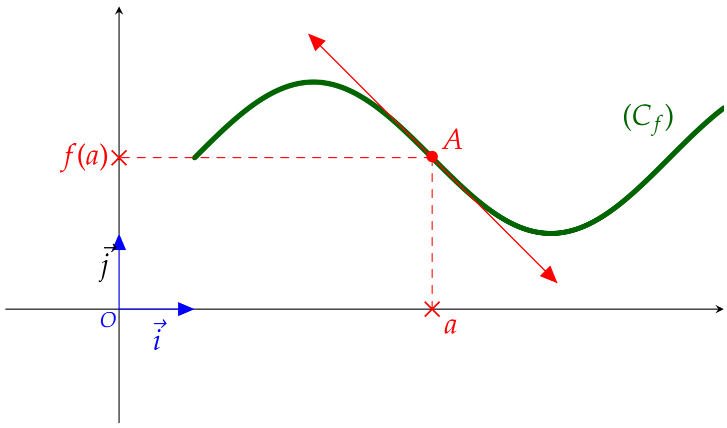
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4$

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. Déduire que La courbe (C_f) est concave sur $\mathbb{R}$.

2. Point d'inflexion

Définition

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
Un point A d'abscisse a de I est appelé point d'inflexion de la courbe (C_f), si la fonction f change de convexité en a.



Le point $A\,(a; f(a))$ est point d'inflexion

Remarque

Si $A\,(a; f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f), alors (C_f) traverse sa tangente au point A.

Propriété

Soit f une fonction dérivable deux fois sur un intervalle I et a un réel de I.
Si la fonction f'' s'annule et change le signe en a, alors le point d'abscisse a est un point d'inflexion de la courbe (C_f).

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 3$

1. Calculer $f^{'}(x)$ et $f^{''}(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convexité de la courbe (C_f) sur $\mathbb{R}$.
3. Déduire que le point d'abscisse $a = 0$ est un point d'inflexion de (C_f).