0.1 Fonction exponentielle népérienne

Activité

1. Montrer que la fonction $\ln$ admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J, à déterminer.
2. Tracer(C) et (C') les courbes de deux fonctions $\ln$ et sa réciproque dans le même repère orthonormé.

Définition

La fonction $\ln$ admet une fonction réciproque définie de $\mathbb{R}$ vers $]0;+\infty[$.
Cette fonction est appelée exponentielle népérienne et notée $\exp$.
Et on écrit :

$$\begin{array}{cccc} \exp & : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0;+\infty[\\ & & x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$$

Remarque

1. $\begin{cases} \ln(y) = x \\ \forall y \in]0;+\infty[\end{cases} \iff \begin{cases} \exp(x) = y \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$.
3. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\exp(\ln x) = x$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

0.2 Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Propriété

1. $\exp(0) = 1$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $r \in \mathbb{Q}$, $\exp(rx) = (\exp(x))^r$

La fonction $\ln$ étant continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, alors :

Remarque

1. La fonction $\exp$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) \quad \exp(x) = \exp(y) \iff x = y$
3. $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) \quad \exp(x) < \exp(y) \iff x < y$

En calculant la dérivée de la composée des deux fonctions $\exp$ et $\ln$, et du fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\ln(\exp(x)) = x$. On obtient alors :
$(\ln(\exp(x)))' = \ln'(\exp(x)).\exp'(x)$, d'où : $(x)' = \dfrac{1}{\exp(x)}.\exp'(x)$
Par suite : $\exp'(x) = \exp(x)$.

Théorème

La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Propriété

Si une fonction u est dérivable sur un intervalle I, alors on a pour tout $x \in I$:

$$[\exp(u(x))]' = u'(x).\exp(u(x)).$$

0.3 Le nombre e et la notation puissance

Les résultats précédents montrent que la fonction $\exp$ possède les propriétés algébriques des puissances.

Définition

On désigne par e le nombre réel positif $\exp(1)$:

$$e = \exp(1)$$

avec $e \approx 2.71828182846$

On peut donc définir une nouvelle notation :
On sait que : $\exp(r) = \exp(r \times 1) = (\exp(1))^r = e^r$ (d'après la propriété 2)
Par conséquent : $\exp(-r) = \dfrac{1}{\exp(r)} = \dfrac{1}{e^r} = e^{-r}$ (d'après la propriété 6)
Ainsi on peut prolonger ce résultat pour tout nombre réel :

Notation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $\exp(x) = e^x$.

Exercice 1

Simplifier les expressions :

a) $e^{\ln(2)}$ b) $e^{-\ln(3)}$ c) $e^{2\ln(5)}$ d) $e^{\frac{1}{2}\ln(16)}$ e) $\ln\left(e^3\right)$ f) $\ln\left(e^{-4}\right)$ g) $\ln\left(\sqrt{e}\right)$ h) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$

i) e^3e^5 j) $e^{-5}e^3e^2$ k) $\left(e^{-3}\right)^2$ l) $\frac{1}{e^7}$ m) $\frac{1}{e^{-x+2}}$ n) $e^{-x+3}e^{2x+2}$ p) $\frac{e^{3x+2}}{e^{2x+3}}$ q) $\left(e^{-2x+3}\right)^2$

Exercice 2

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3e^x + x$ b) $f(x) = xe^x$ c) $f(x) = \frac{1}{e^x + 3}$ d) $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 2}$

e) $f(x) = \left(3x^2 + x\right)e^x$ f) $f(x) = \left(e^x + x^2\right)^2$ g) $f(x) = e^x\cos(2x)$ h) $f(x) = \frac{3}{2e^x - 1}$

i) $f(x) = e^{3x+2}$ j) $f(x) = 5e^{-x+3}$ k) $f(x) = xe^{3x}$ l) $f(x) = \frac{1}{e^{2x-1}}$

m) $f(x) = e^{x^2+1}$ n) $f(x) = \cos(2x)e^{3x}$ p) $f(x) = \frac{e^{2x}+1}{2e^{-x}-1}$

0.4 Étude de la fonction exponentielle

0.4.1 Tableau de variation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(e^x)' = \exp'(x) = \exp(x) > 0$ (Voir le Théorème et la première remarque)

x	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)'$	$+$	
e^x	0 $\nearrow$	$+\infty$

Les limites de la fonction $\exp$ en $-\infty$ et $+\infty$ sont identiques aux bornes de l'intervalle $]0;+\infty[$ ensemble de définition de la fonction $\ln$.

Propriété

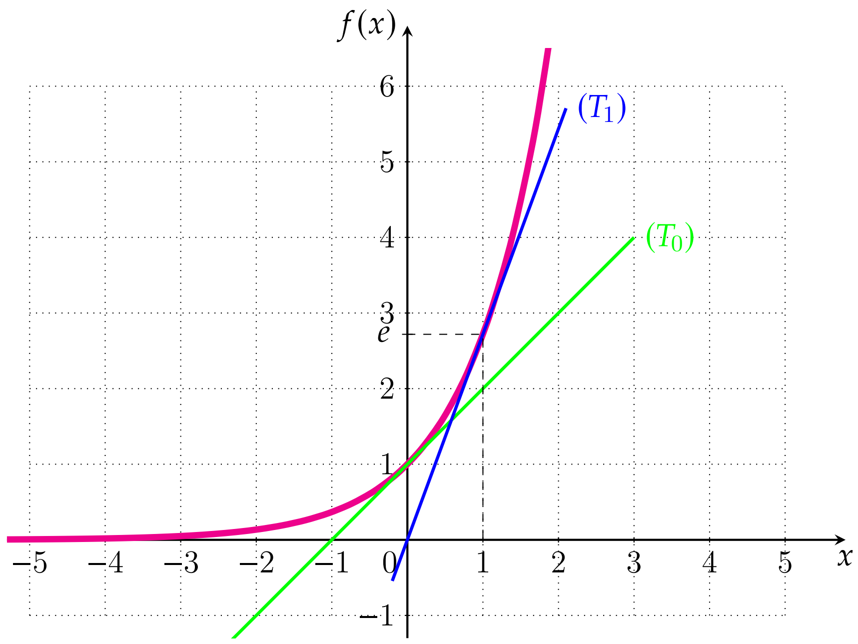
— Asymptote : $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$, donc l'axe des abscisses $y = 0$ est une asymptote à la courbe (C) de la fonction $\exp$ au voisinage de $-\infty$.

— Équation de la tangente à (C) en $x = 0$: $y = \exp'(0)(x-0) + \exp(0) \iff y = x + 1$. Par changement de variable, on obtient limite : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

— Équation de la tangente à (C) en $x = 1$.
Par définition, $\exp(1) = e$ et $\exp'(1) = \exp(1) = e$. Donc

$$y = exp'(1)(x-1) + \exp(1) = e(x-1) + e = ex$$

0.4.2 Représentation graphique



0.4.3 Résolution d'équations et d'inéquations

Propriété

Pour tout réel a et b,

$$e^a = e^b \iff a = b$$
$$e^a > e^b \iff a > b$$

Démonstration : La fonction $\exp$ est strictement croissante.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^x = 3$ b) $e^x + 1 = 0$ c) $e^{x+3} = 1$ d) $\ln(x) = 6$ e) $\ln(x) = -2$ f) $\ln(x+2) = 5$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

a) $e^2 2x + 1 = 3$ b) $e^{-3x+2} = 0$ c) $e^{2x+1} = e^{-x-1}$ d) $\dfrac{e^{3x-2}}{e^{2x+5}} = 1$

e) $e^{x^2+5x-5} = e$ f) $e^{6x-1} = 5$ g) $e^{3x} - 2 > 1$ h) $\dfrac{e^{5x+2}}{e^{-3x+6}} > 0$ i) $\dfrac{e^{5x+2}}{e^{-3x+6}} > 6$

0.4.4 Limites en l'infini

Propriété

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+ \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0^- \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0.$$

Démonstration : La courbe (C) de la fonction $\exp$ est au-dessus de l'axe des abscisses et elle admet une branche parapolique dirigée vers l'axe des ordonnées, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Méthodes

1. Pour calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} x^m e^{nx}$, il suffit d'utiliser l'égalité : $x^m e^{nx} = \left[\frac{n}{m} x e^{\frac{n}{m}x}\right]^m \times \left(\frac{m}{n}\right)^m$
2. Pour calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{nx}}{x^m}$, il suffit d'utiliser l'égalité : $\frac{e^{nx}}{x^m} = \left[\frac{e^{\frac{n}{m}x}}{\frac{n}{m}x}\right]^m \times \left(\frac{n}{m}\right)^m$

Exercice 5

Déterminer les limites suivantes, et interpréter graphiquement le résultat, en terme d'asymptote, lorsque cela est possible :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} + e^x + 3x$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} + e^x + 5x^3$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 10 - e^{-0,1x}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2} + e^x$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+3}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{15}{1-e^{1-x}}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^x+3}{e^{-3x}}$

Exercice 6

Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x} - 6x + 5$.

0.4.5 Fonctions primitives de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

Propriété

Si une fonction u est dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ est continue sur I, donc admet une primitive définie pour tout $x \in I$ par : $x \mapsto e^{u(x)}$

Exercice 7

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a)$f(x) = 2e^x$ b)$f(x) = x + 1 + e^x$ c)$f(x) = e^{2x}$ d)$f(x) = e^{-x}$

e)$f(x) = -5e^{3x+2}$ f)$f(x) = 3e^{0,02x}$ g)$f(x) = -2e^{-2x} + e^{-x}$ h)$f(x) = xe^{2x^2}$

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left(-x^2 - 2x + 2\right) e^{-x} + 3$.

1. Montrer que $f'(x) = \left(x^2 - 4\right) e^{-x}$, En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(x^2 + 4x + 2\right) e^{-x} + 3x$.
   Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $F : x \mapsto (ax + b)e^x$ soit une primitive de la fonction $f : x \mapsto (2x + 1)e^x$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - \dfrac{x}{2} - 1$ et (C) sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   (b) Vérifier que, pour tout réel x non nul, $f(x) = x\left(\dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. (a) Déterminer la fonction dérivée f' de f.
   (b) Résoudre dan $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x - \dfrac{1}{2} \geqslant 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$.
   (c) Calculer la valeur exacte de $f\left(\ln \dfrac{1}{2}\right)$.
   (d) Dresser le tableau de variation de f.
3. Tracer la courbe (C).

0.5 Exponentielle de base a

0.5.1 Définition et propriétés

Soit a un réel strictement positif, différent de 1, et n un entier relatif. On sait que $\ln(a^n) = n \ln a$ donc $a^n = \mathrm{e}^{b \ln a}$.
On décide alors de généraliser aux réels b.

Définition

Soit a un réel strictement positif.
Pour tout réel b, on pose $a^b = \mathrm{e}^{b \ln a}$.

Exemples : $2^{1,5} = \exp(1,5 \ln 2) \approx 2,83$ $\qquad 3^{\pi} = \exp(\pi \ln 3) \approx 31,54$

Définition

Soit a un réel strictement positif, différent de 1.
La fonction $\log_a$ est définie, continue et strictement monotone de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$, donc elle admet une fonction réciproque appelée fonction exponentielle de base a définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{*+}$, notée $\exp_a$.
Et on écrit :

$$\begin{array}{rcccl} \exp_a & : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0;+\infty[\\ & & x & \longmapsto & \exp_a(x) \end{array}$$

De plus on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{*+} \quad y = \exp_a(x) \Leftrightarrow x = \log_a y$$

Notation

Soit a un réel strictement positif, différent de 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $\exp_a(x) = a^x$.

En effet : $x = \log_a(\exp_a(x)) = \dfrac{\ln(\exp_a(x))}{\ln a} \Leftrightarrow \ln(\exp_a(x)) = x\ln a \Leftrightarrow \exp_a(x) = e^{x\ln a} \Leftrightarrow \exp_a(x) = a^x$

Propriété

Pour tous les réels a et a' strictement positifs et pour tous réels b et b', on a :

$$\bullet \ln(a^b) = b\ln a \qquad \bullet a^{b+b'} = a^b a^{b'} \qquad \bullet a^{b-b'} = \frac{a^b}{a^{b'}}$$

$$\bullet (a^b)^{b'} = a^{bb'} \qquad \bullet (aa')^b = a^b a'^b \qquad \bullet \left(\frac{a}{a'}\right)^b = \frac{a^b}{a'^b}$$

0.5.2 Dérivée de la fonction exponentielle de base a

Activité

Soit $a > 0$ un nombre réel différent de 1, et f la fonction exponentielle de base a, c'est-à-dire la fonction définie par $f(x) = a^x$.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f.
2. En déduire le signe de $f'(x)$, puis le sens de variation de f, selon la valeur de a.

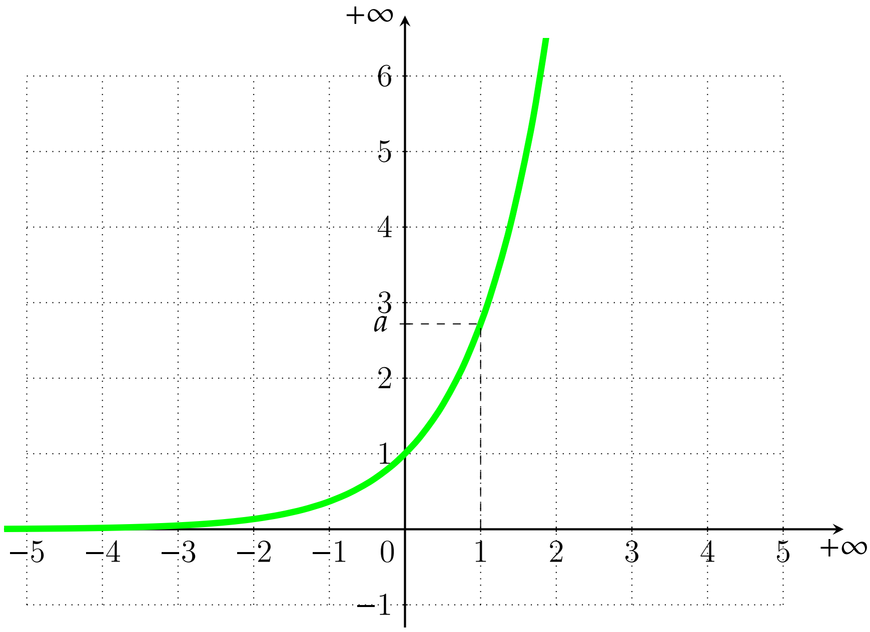
Propriété

La fonction exponentielle de base a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(a^x)' = \ln a \times a^x$

Démonstration : D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, puisque $f(x) = e^{x\ln a}$, f' est telle que $f'(x) = (\ln a)e^{x\ln a} = (\ln a)a^x$.

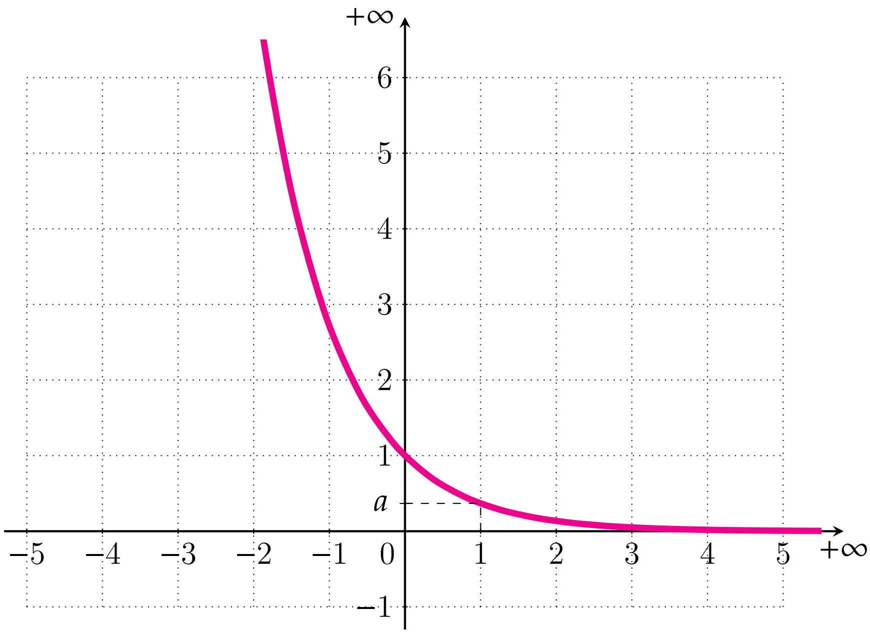
Premier Cas : $a > 1$ **c-à-d** $\ln a > 0$

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad$ $+\infty$
a^x	$0 \nearrow +\infty$



Deuxième Cas : $0 < a < 1$ **c-à-d** $\ln a < 0$

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad$ $+\infty$
a^x	$+\infty \searrow 0$



Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

a) $2^{x+1} = 3^{x+1}$ b) $3\left(5^{2x}\right) - 4\left(5^{2x}\right) + 1 = 0$ c) $28(8)^{2x+1} + 1 \leq 7(2)^{x-4} + 1$ d) $2^{x+1} + 1 < 3^x - 2$