***Géométrie analytique dans l’espace***

1. ***Coordonnées d’un point dans un repère – Coordonnées d’un vecteur dans une base***
2. ***Base et repère dans l’espace :***

***Définition***

Soient  et  quatre points non coplanaires.

On pose 

\* Le triplet  est appelé une base de l’espace.

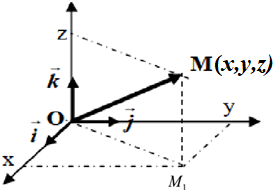
\* Le quadruplet  est appelé un repère de l’espace.

**Remarque :**

* Si , et  et  alors  est un repère orthonormé.
* Quatre points non coplanaires  et  déterminent une base de l’espace.

Par exemple, et un repère de l’espace par exemple.

1. ***Coordonnées d’un point dans un repère – coordonnées d’un vecteur dans une base***



D’après la relation de Chasles

On a 

***Propriété***

Soit  un repère de l’espace.

* Pour tout point  de l’espace, il existe unique triplet  de réels que : 
* Pour tout vecteur  de l’espace, il existe unique triplet de réels tel que : 
* Le triplet  est appelé triplet de coordonnées du point  dans le repère.
*  est l’abscisse du point,  est l’ordonnée du point,  est la côte du point, et on écrit :  ou .
* Le triplet  est appelé triplet de coordonnées du vecteur  dans la base  et on note.

1. ***Déterminant de trois vecteurs :***
2. ***Condition de colinéarité de deux vecteurs :***

***Activité***

Soient  et  deux vecteurs de l’espace tels que  et sont des nombres réels non nuls.

1. Montrer que :  et  sont colinéaires si et seulement si 
2. Montrer que :  et  sont colinéaires si et seulement si  et  et 

***Propriétés***

Soient  et  deux vecteurs non nuls.

* Les vecteurs  et  sont ***colinéaires*** si et seulement s’il existe un nombre réel  tel que :  et  et (condition géométrique).
* Soient  et  deux vecteurs non nuls, et  sont ***colinéaires*** si et seulement si ,  et  (condition analytique).

***Autrement dit***

*  et  ***sont*** ***colinéaires*** si et seulement si  et  et .
*  et  ***ne sont pas colinéaires*** si et seulement si  ou  ou 

1. ***Déterminant de trois vecteurs***

Soient  et trois vecteurs de l’espace.

Le nombre réel  est appelé déterminant des vecteurs  et , et on le note .

***Exemple***

Calculer tels que et 



1. ***Vecteurs coplanaires***

***Propriété***

Soient  et  trois vecteurs de l’espace.

 et  sont coplanaires si et seulement si .

***Exemples***

* On considère les vecteurs :  et 

On a : 

Or  donc les vecteurs  et  ne sont pas coplanaires.

***Application➀***

1. On considère les vecteurs   et .

Montrer que les vecteurs  et  sont coplanaires.

1. On considère les vecteurs   et .

Déterminer pour que les vecteurs  et  soient coplanaires.

1. ***Représentation paramétrique d’une droite – Deux équations cartésiennes d’une droite.***
2. ***Représentation paramétrique d’une droite***

***Activité***

On considère les points  et 

Soit  un point de l’espace.

1. Montrer que si  alors tel que  le système est une représentation paramétrique de la droite 
2. Montrer que 
3. Le point  appartient-il à la droite  ?

***Propriété***

Soit  un point de l’espace et soit  un vecteur non nul.

Le système  est appelé ***représentation paramétrique*** de la droite  passant par A et de vecteur directeur 

***Exemple***

 ;  est une représentation paramétrique de la droite  où  et 

1. ***Deux équations cartésiennes d’une droite :***

***Définition et propriété :***

Soit  une droite passant par le point  et de vecteur directeur.

* Si  et alors le système  s’appelle deux équations cartésiennes de la droite 
* Si l’un des nombres (un seul)  ou bien  ou bien  est nul (par exemple  et  ou bien) alors, le système  est appelé ***équations cartésiennes*** de la droite 
* Si deux de ces nombres sont nuls (par exemple  et  ou bien) alors le système est appelé ***équations cartésiennes*** de la droite.

***Exemples***

* Soit  la droite passant par le point  et de vecteur directeur

On a :

Donc  Sont deux équations cartésiennes de la droite.

* Soit  la droite passant par le point  et de vecteur directeur.

On a  sont deux équations cartésiennes de la droite.

***Application➁***

1. Déterminer deux équations cartésiennes de la droite passant par le point  et dirigée par le vecteur .
2. Soit  une droite définie par ses deux équations cartésiennes suivantes 
3. Déterminer un vecteur directeur de la droite et un point de .
4. Déduire une représentation paramétrique de la droite .
5. ***Représentation paramétrique d’un plan – Equation cartésienne d’un plan***
6. ***Représentation paramétrique d’un plan***

***Activité***

On considère les points  et.

1. Montrer que les points  et  ne sont pas alignés.
2. Soit  un point de l’espace.

Montrer que  le système est une ***représentation paramétrique*** du plan .

1. En déduire que 

L’équation  est appelé une appelé une ***équation cartésienne*** du plan.

***Définition***

Soit  un point de l’espace,  et  deux vecteurs ***non*** ***colinéaires***.

Le système   est appelé une ***représentation*** ***paramétrique*** du plan  passant par  et de vecteurs directeurs  et.

***Exemple***

Déterminer une représentation paramétrique du plan  tel que  et  et .

Soit  un point de l’espace.



1. ***Equation cartésienne d’un plan***

***Définition***

Soit  un point de l’espace,  et  sont deux vecteurs non colinéaires.

L’équation cartésienne du plan  passant par  et de vecteurs directeurs  et  s’écrit sous la forme  où  et  sont des réels tels que 

***Remarque* :**

L’ensemble des points de l’espace qui vérifient  est un plan passant par  et dirigé par les vecteurs  et .

***Exemple***

Déterminer une équation cartésienne du plan  qui passe par le point  et dirigé par les vecteurs  et .







Donc  est une équation cartésienne du plan  .

1. ***Positions relatives de deux droites - Positions relatives de deux plan – Positions relatives d’une droite et un plan***
2. ***Positions relatives de deux droites dans l’espace***

***Propriété***

Soient  et  deux droites de l’espace.

\* Si  et  sont colinéaires et  ou  alors  et  sont confondues.

\* Si  et  sont colinéaires et  ou  alors  et  sont strictement parallèles.

\* Si  et  ne sont pas colinéaires et  alors  et  sont sécantes (se coupent en un point).

\* Si  et  ne sont pas colinéaires et  alors  et  ne sont pas coplanaires.

***Remarque***

Soient  et  deux points de l’espace,  et  deux vecteurs non nuls.

On considère les droites  ,  et, 

* Si  et  sont colinéaires alors // 
* Si  et  ne sont pas colinéaires alors :
*  et  sont sécantes si et seulement si le système :  ayant pour inconnues  et  admet une solution unique.
*  et  ne sont pas coplanaires si et seulement si le système  n’admet aucune solution.

***Application➂***

Etudier les positions relatives de la droite et la droite  dans les cas suivants :

 ;  et  , 

 ;  et  , 

 ;  et  , 

1. ***Positions relatives de deux plans***

***Propriété***

Soient  et  deux plans de l’espace.

\* Si  et  et  ou  alors  et  sont confondus

\*Si  et  et  ou  alors  et  strictement parallèles.

\* Si  ou alors  et  se coupent selon une droite.

***Remarque***

Soient  et  deux plans définis par leurs équations cartésiennes :  et  où  et.

* Les plans  et  se coupent suivant une droite si et seulement si  ;  ou.
* Les plans  et  sont parallèles si et seulement s’il existe un réel  non nul tel que  et.
* Les plans  et  sont confondus si et seulement s’il existe un réel  non nul tel que : et.

***Application➃***

Etudier la position relative du plan  et le plan  dans les cas suivants :

 ; 

 ; 

1. ***Positions relatives d’une droite et un plan***

***Propriété***

Soit  une droite de l’espace et soit  un plan de l’espace.

\*Si  et alors .

\* Si  et, alors  est strictement parallèle à 

\* Si  alors  perce le plan 

***Exemple***

Soit  le plan défini par l’équation cartésienne :  et  la droite définie par la représentation paramétrique  ; 

Pour étudier l’intersection de  et  on résout le système : 

On remplace respectivement  et  par  et  dans l’équation  on obtient :   D’où 

Après remplacement dans les équations :  et  on trouve le triplet  solution du système .

Donc  perce le plan  au point

***Application➄***

Etudier la position relative de la droite  et le plan  dans les cas suivants

 ; 

 ; 