# I. Coordonnées d'un point dans un repère – Coordonnées d'un vecteur dans une base

## 1. Base et repère dans l'espace :

**Définition**

Soient $O, I, J$ et $K$ quatre points non coplanaires.

On pose $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ ,$\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$

* Le triplet $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est appelé une base de l'espace.

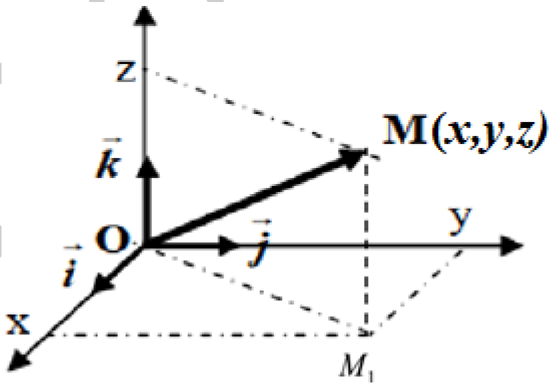
* Le quadruplet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est appelé un repère de l'espace.

**Remarque :**

- Si $(OI) \perp (OJ)$, $(OJ) \perp (OK)$ et $(OI) \perp (OK)$ et $OI = OJ = OK = 1u$ alors $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est un repère orthonormé.
- Quatre points non coplanaires $O, A, B$ et $C$ déterminent une base de l'espace.

Par exemple $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})$, et un repère de l'espace par exemple $(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})$.

## 2. Coordonnées d'un point dans un repère – coordonnées d'un vecteur dans une base




D'après la relation de Chasles

On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

**Propriété**

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère de l'espace.

- Pour tout point $M$ de l'espace, il existe unique triplet $(x; y; z)$ de réels que :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe unique triplet de réels $(x; y; z)$ tel que :

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

- Le triplet $(x;y;z)$ est appelé triplet de coordonnées du point $M$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
- $x$ est l'abscisse du point $M$, $y$ est l'ordonnée du point $M$, $z$ est la côte du point $M$, et on écrit : $M(x;y;z)$ ou $\overrightarrow{OM}(x;y;z)$.
- Le triplet $(x;y;z)$ est appelé triplet de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ et on note $\vec{u}(x;y;z)$.

## II. Déterminant de trois vecteurs :

### 1. Condition de colinéarité de deux vecteurs :

**Activité**

Soient $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs de l'espace tels que $x, y, z, x', y'$ et $z'$ sont des nombres réels non nuls.

1) Montrer que : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}$

2) Montrer que : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-yx'=0$ et $xz'-zx'=0$ et $yz'-zy'=0$

**Propriétés**

Soient $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs non nuls.

* Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** si et seulement s'il existe un nombre réel $k$ tel que : $x=kx'$ et $y=ky'$ et $z=kz'$ (condition géométrique).
* Soient $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** si et seulement si $xy'-x'y=0$, $xz'-x'z=0$ et $yz'-y'z=0$ (condition analytique).

**Autrement dit**

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ***sont colinéaires*** si et seulement si $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=0$ et $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}=0$ et $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}=0$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ***ne sont pas colinéaires*** si et seulement si $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\neq 0$ ou $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\neq 0$ ou $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\neq 0$

### 2. Déterminant de trois vecteurs

Soient $\vec{u}(x;y;z), \vec{v}(x';y';z')$ et $\vec{w}(x'';y'';z'')$ trois vecteurs de l'espace.

Le nombre réel

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = x(y'z''-z'y'')-y(x'z''-z'x'')+z(x'y''-y'x'')$$

est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, et on le note $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$.

### Exemple

Calculer $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ tels que $\vec{u}\left(1;2;3\right),\vec{v}\left(3;1;2\right)$ et $\vec{w}\left(2;3;1\right)$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix}1&3&2\\2&1&3\\3&2&1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3&2\\2&1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3&2\\1&3\end{vmatrix}=1\left(1-6\right)-2\left(3-4\right)+3\left(9-2\right)=-5+2+21=18$$

## 3. Vecteurs coplanaires

### Propriété

Soient $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

$\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$.

### Exemples

⇨ On considère les vecteurs : $\vec{u}(1,1,0),\vec{v}(1,0,1)$ et $\vec{w}(0,1,1)$

On a : $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix}1&1&0\\-2&3&1\\0&4&1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}3&1\\4&1\end{vmatrix}-\left(-2\right)\begin{vmatrix}1&0\\4&1\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}1&0\\3&1\end{vmatrix}=-1+2=1$

Or $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

### Application ①

1) On considère les vecteurs $\vec{u}\left(2;1;4\right),\vec{v}\left(1;-1;1\right)$ et $\vec{w}\left(1;2;3\right)$.

   Montrer que les vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

2) On considère les vecteurs $\vec{u}\left(1+m;1;2m-1\right),\vec{v}\left(1;-1;1\right)$ et $\vec{w}\left(1;2;3\right)$.

Déterminer $m$ pour que les vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires.

# III. Représentation paramétrique d'une droite – Deux équations cartésiennes d'une droite.

## 1. Représentation paramétrique d'une droite

### Activité

On considère les points $A(1;2;-1),B(-1;3;1),C(5;0;-5)$ et $E(1;3;0)$.

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

1) Montrer que si $M \in (AB)$ alors $(\exists t \in \mathbb{R})$ tel que $(S)\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+t \\ z = -1+2t \end{cases}$ le système est une représentation paramétrique de la droite $(AB)$

2) Montrer que $C \in (AB)$.

3) Le point $E$ appartient-il à la droite $(AB)$ ?

**Propriété**

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace et soit $\vec{u}(a;b;c)$ un vecteur non nul.

Le système $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \, / \, (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_A + ct \end{cases}$ est appelé ***représentation paramétrique*** de la droite $D(A, \vec{u})$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$

**Exemple**

$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 1+3t \end{cases}$ ; $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite $D(A, \vec{u})$ où $A(1;1;1)$ et $\vec{u}(1;2;3)$

## 2. Deux équations cartésiennes d'une droite :

**Définition et propriété :**

Soit $(D)$ une droite passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$.

- Si $a \neq 0, b \neq 0$ et $c \neq 0$ alors le système $\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}$ s'appelle deux équations cartésiennes de la droite $(D)$
- Si l'un des nombres (un seul) $a$ ou bien $b$ ou bien $c$ est nul (par exemple $a = 0$ et $b \neq 0$ ou bien $c \neq 0$) alors, le système $\begin{cases} x = x_A \\ \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c} \end{cases}$ est appelé ***équations cartésiennes*** de la droite $(D)$
- Si deux de ces nombres sont nuls (par exemple $a = 0$ et $b = 0$ ou bien $c \neq 0$) alors le système $\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \end{cases}$ est appelé ***équations cartésiennes*** de la droite $(D)$.

**Exemples**

⇨ Soit $(D_1)$ la droite passant par le point $A(1;-2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(4;5;6)$

On a : $M(x;y;z) \in D_1(A,\vec{u}) \Leftrightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-3}{6}$

Donc $\begin{cases} \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{5} \\ \frac{y+2}{5} = \frac{z-3}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x-1) = 4(y+2) \\ 6(y+2) = 5(z-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-4y-13=0 \\ 6y-5z+27=0 \end{cases}$ Sont deux équations cartésiennes de la droite $(D_1)$.

⇨ Soit $(D_2)$ la droite passant par le point $B(1;1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(4;0;6)$.

On a $M(x;y;z) \in D_2(A,\vec{v}) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{4} = \frac{z-2}{6} \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-6=4z-8 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-4z+2=0 \\ y-1=0 \end{cases}$ sont deux équations cartésiennes de la droite $(D_2)$.

***Application ②***

1) Déterminer deux équations cartésiennes de la droite $(D)$ passant par le point $A\left(-1;-2;\frac{1}{3}\right)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\left(-2;\frac{1}{2};1\right)$.

2) Soit $(\Delta)$ une droite définie par ses deux équations cartésiennes suivantes $\frac{2x-1}{3} = \frac{3y-2}{-2} = \frac{z-1}{2}$

a) Déterminer un vecteur directeur de la droite $(\Delta)$ et un point de $(\Delta)$.

b) Déduire une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$.

## IV. Représentation paramétrique d'un plan – Equation cartésienne d'un plan

### 1. Représentation paramétrique d'un plan

***Activité***

On considère les points $A(1;2;3), B(-1;3;1)$ et $C(3;3;-1)$.

1) Montrer que les points $A, B$ et $C$ ne sont pas alignés.
2) Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

Montrer que $M \in (ABC) \Leftrightarrow (\exists(t;t') \in \mathbb{R}^2) : \begin{cases} x = 1-2t+2t' \\ y = 2+t+t' \\ z = 3-2t+4t' \end{cases}$ le système est une ***représentation paramétrique*** du plan $(ABC)$.

3) En déduire que $M(x;y;z)\in(ABC)\Leftrightarrow x+6y+2z-19=0$

L'équation $x+6y+2z-19=0$ est appelé une appelé une ***équation cartésienne*** du plan $(ABC)$.

***Définition***

Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace, $\vec{u}(\mathrm{a};\mathrm{b};\mathrm{c})$ et $\vec{v}(\mathrm{a}';\mathrm{b}';\mathrm{c}')$ deux vecteurs ***non colinéaires***.

Le système $\begin{cases} x=x_A+at+a't' \\ y=y_A+bt+b't' \ / \left((t,t')\in\mathbb{R}^2\right) \\ z=z_A+ct+c't' \end{cases}$ est appelé une ***représentation paramétrique*** du plan $P(A;\vec{u};\vec{v})$ passant par $A$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

***Exemple***

Déterminer une représentation paramétrique du plan $P(A;\vec{u};\vec{v})$ tel que $A(2;-1;3)$ et $\vec{u}(1;-2;1)$ et $\vec{v}(-2;4;5)$.

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

$$M(x;y;z)\in P\Leftrightarrow(\exists(t;t')\in\mathbb{R}^2):\begin{cases} x=2+1t-2t' \\ y=-1-2t+4t' \ / \left((t,t')\in\mathbb{R}^2\right) \\ z=3+1t+5t' \end{cases}$$

## 2. Equation cartésienne d'un plan

***Définition***

Soit $A$ un point de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires.

L'équation cartésienne du plan $(P)$ passant par $A$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'écrit sous la forme $ax+by+cz+d=0$ où $a,b,c$ et $d$ sont des réels tels que $(a;b;c)\neq(0;0;0)$

***Remarque :***

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace qui vérifient $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$ est un plan passant par $A$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

***Exemple***

Déterminer une équation cartésienne du plan $P$ qui passe par le point $A(1;-2;1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1;-2;1)$ et $\vec{v}(1;1;3)$.

$M(x;y;z)\in P\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y+2 & -2 & 1 \\ z-1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(x-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}-(y+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow-7(x-1)-2(y+2)+3(z-1)=0\Leftrightarrow-7x-2y+3z=0$

Donc $-7x-2y+3z=0$ est une équation cartésienne du plan $P$ .

# V. Positions relatives de deux droites - Positions relatives de deux plan – Positions relatives d'une droite et un plan

## 1. Positions relatives de deux droites dans l'espace

**Propriété**

Soient $(D)=D(A;\vec{u})$ et $(\Delta)=\Delta(B;\vec{v})$ deux droites de l'espace.

* Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $A\in(\Delta)$ ou $B\in(D)$ alors (D) et $(\Delta)$ sont confondues.

* Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $A\notin(\Delta)$ ou $B\notin(D)$ alors (D) et $(\Delta)$ sont strictement parallèles.

* Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $\det(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v})=0$ alors $(D)$ et $(\Delta)$ sont sécantes (se coupent en un point).

* Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $\det(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v})\neq 0$ alors $(D)$ et $(\Delta)$ ne sont pas coplanaires.

**Remarque**

Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points de l'espace, $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ deux vecteurs non nuls.

On considère les droites $(D):\begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt \\ z=z_A+ct \end{cases}$, $(t\in\mathbb{R})$ et $(\Delta):\begin{cases} x=x_B+a't' \\ y=y_B+b't' \\ z=z_B+c't' \end{cases}$, $(t'\in\mathbb{R})$

⇨ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $(D)//(\Delta)$

⇨ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors :

* $(D)$ et $(\Delta)$ sont sécantes si et seulement si le système : $(S):\begin{cases} x_A+at=x_B+a't' \\ y_A+bt=y_B+b't' \\ z_A+ct=z_B+c't' \end{cases}$ ayant pour inconnues $t$ et $t'$ admet une solution unique.

* $(D)$ et $(\Delta)$ ne sont pas coplanaires si et seulement si le système $(S)$ n'admet aucune solution.

**Application③**

Etudier les positions relatives de la droite $(D)$ et la droite $(\Delta)$ dans les cas suivants :

$a)$ • $(D):\begin{cases} x=-2+t \\ y=2-2t \\ z=4+t \end{cases}$ ; $(t\in\mathbb{R})$ et $(\Delta):\begin{cases} x=-1-t' \\ y=2t' \\ z=1+t' \end{cases}$ , $(t'\in\mathbb{R})$

$b)\bullet \quad (D):\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \\ z=2+3t \end{cases} ;\ (t\in\mathbb{R}) \text{ et } (\Delta):\begin{cases} x=2t' \\ y=1-t' \\ z=3+t' \end{cases} ,\ (t'\in\mathbb{R})$

$c)\bullet \quad (D):\begin{cases} x=1+t \\ y=-2 \\ z=2-t \end{cases} ;\ (t\in\mathbb{R}) \text{ et } (\Delta):\begin{cases} x=2t' \\ y=1 \\ z=3-2t' \end{cases} ,\ (t'\in\mathbb{R})$

## 2. ***Positions relatives de deux plans***

***Propriété***

Soient $(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})$ et $(Q)=P(B;\vec{u}';\vec{v}')$ deux plans de l'espace.

* Si $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u}')=0$ et $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{v}')=0$ et $A\in(Q)$ ou $B\in(P)$ alors $(P)$ et $(Q)$ sont confondus

*Si $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u}')=0$ et $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{v}')=0$ et $A\notin(Q)$ ou $B\notin(P)$ alors $(P)$ et $(Q)$ strictement parallèles.

* Si $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u}')\neq 0$ ou $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{v}')\neq 0$ alors $(P)$ et $(Q)$ se coupent selon une droite.

***Remarque***

Soient $(P)$ et $(P')$ deux plans définis par leurs équations cartésiennes : $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$ où $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ et $(a';b';c')\neq(0;0;0)$.

- ⇨ Les plans $(P)$ et $(P')$ se coupent suivant une droite si et seulement si $ab'-ba'\neq 0$ ; $ac'-ca'\neq 0$ ou $bc'-cb'\neq 0$.
- ⇨ Les plans $(P)$ et $(P')$ sont parallèles si et seulement s'il existe un réel $k$ non nul tel que $a'=ka;b'=kb$ et $c'=kc$.
- ⇨ Les plans $(P)$ et $(P')$ sont confondus si et seulement s'il existe un réel $k$ non nul tel que : $a'=ka;b'=kb;c'=kc$ et $d'=kd$.

***Application④***

Etudier la position relative du plan $(P)$ et le plan $(Q)$ dans les cas suivants :

$a)\bullet \quad (P):\begin{cases} x=1+2t+t' \\ y=2-t+t' \\ z=-1-t' \end{cases} /\left((t;t')\in\mathbb{R}^2\right) \quad ;\ (Q):\begin{cases} x=5+5t' \\ y=3+t+t' \\ z=2+t+3t' \end{cases} /\left((t;t')\in\mathbb{R}^2\right)$

$b)\bullet \quad (P):2x+y-z+2=0 \ ;\ (Q):3x+y-4z-1=0$

## 3. ***Positions relatives d'une droite et un plan***

***Propriété***

Soit $(D)=D(A;\vec{w})$ une droite de l'espace et soit $(P)=P(B;\vec{u};\vec{v})$ un plan de l'espace.

*Si $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$ et $A\in(P)$ alors $(D)\subset(P)$.

* Si $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$ et $A\notin(P)$, alors $(D)$ est strictement parallèle à $(P)$

* Si $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\neq 0$ alors $(D)$ perce le plan $(P)$

***Exemple***

Soit $(P)$ le plan défini par l'équation cartésienne : $x+y-z+1=0$ et $(D)$ la droite définie par la représentation paramétrique $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=1+2t \end{cases}$ ; $(t\in\mathbb{R})$

Pour étudier l'intersection de $(D)$ et $(P)$ on résout le système : $(S)\begin{cases} x+y-z+1=0 & (1) \\ x=1+t & (2) \\ y=1-t & (3) \\ z=1+2t & (4) \end{cases}$

On remplace respectivement $x,y$ et $z$ par $1+t, 1-\mathrm{t}$ et $1+2t$ dans l'équation (1) on obtient : $1+t+1-\mathrm{t}-1-2\mathrm{t}+1=0$ D'où $t=1$

Après remplacement dans les équations : (2),(3) et (4) on trouve le triplet $(2;0;3)$ solution du système $(S)$.

Donc $(D)$ perce le plan $(P)$ au point $M(2;0;3)$

***Application⑤***

Etudier la position relative de la droite $(D)$ et le plan $(P)$ dans les cas suivants

$a)\bullet$ $(D):\begin{cases} x=2-4t \\ y=-1+2t \,/\, (t\in\mathbb{R}) \\ z=3t \end{cases}$ ; $(P):3x+2y+z+1=0$

$b)\bullet$ $(D):\begin{cases} x=-4+5t \\ y=-1-2t \,/\, (t\in\mathbb{R}) \\ z=-3+t \end{cases}$ ; $(P):x+3y+z+4=0$