Support de cours

1 Baccalauréat Scientifique

Géométrie dans l'espace 1

Réalisé par : Pr. Yassine Aouami

Version étudiant(e)

Contenu du chapitre

• Vecteurs de l'espace

• Étude analytique de l'espace

Connaître le cours

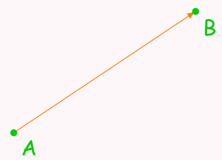
I- Calcul vectoriel dans l'espace

1- Notion de vecteur de l'espace

Définition

Soit A et B deux points de l'espace. un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le bipoint (A, B) d'origine A et d'extrémité B.

1. Si $A \neq B$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :
   a. une **direction**, celle de la droite (AB).
   b. un **sens**, de A à B.
   c. une **norme**, notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, la distance entre A et B.



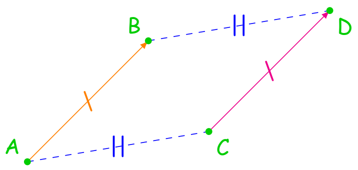
2. Si $A = B$, alors $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur nul, on le note $\overrightarrow{0}$.

Remarques

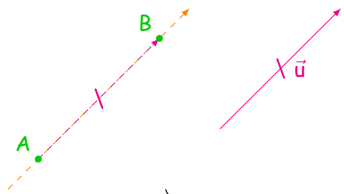
◇ L'ensemble des vecteurs de l'espace est appelé un **espace vectoriel**, on le note $\mathcal{V}_3$.

Propriété

1. Pour tout point A de l'espace et pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un point unique B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
2. Un quadrilatère ABDC est un parallélogramme si et seulement si les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux.



Le quadrilatère ABDC est un parallélogramme



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont égaux

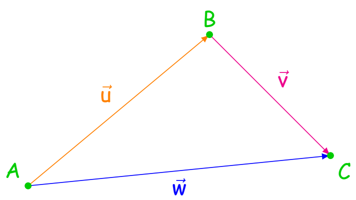
2- Opérations sur les vecteurs

On définit comme dans le plan des opérations sur les vecteurs.

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On construit les points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.

La somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$, et on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

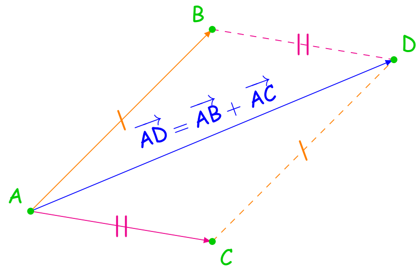


$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Propriété

Soit A, B et C trois points non-alignés de l'espace.

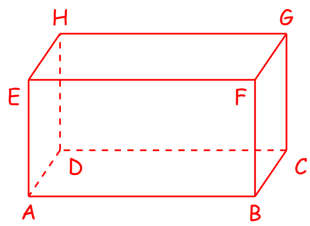
La somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$ tel que , ABDC est parallélogramme.



Applications

On considère, ci-contre, le parallélépipède rectangle ABCDEFGH :

1. Montrer que : $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BH}$.
2. Montrer que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AG}$.
3. Montrer que : $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AF}$.

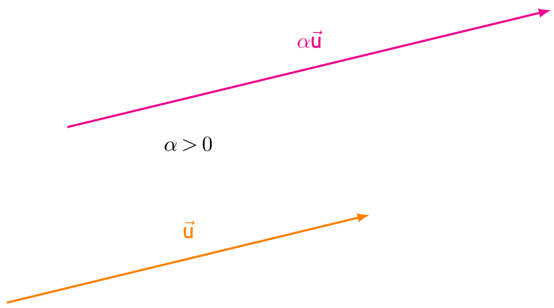


Définition

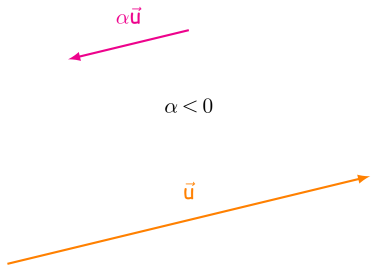
Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}_3$ et α un réel.

Le produit de $\vec{u}$ par α est le vecteur, noté $\alpha\vec{u}$, tel que :

1. Si $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\alpha\vec{u} = \vec{0}$.
2. Si $\alpha \neq 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\alpha\vec{u}$ ont la **même direction**, et on a :
   - a. Si $\alpha > 0$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\alpha\vec{u}$ ont le **même sens**, et $\|\alpha\vec{u}\| = \alpha \times \|\vec{u}\|$.
   - b. Si $\alpha < 0$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\alpha\vec{u}$ ont des **sens opposés**, et $\|\alpha\vec{u}\| = -\alpha \times \|\vec{u}\|$.



- les vecteurs $\vec{u}$ et $\alpha\vec{u}$ ont le même sens.



- les vecteurs $\vec{u}$ et $\alpha\vec{u}$ ont même sens.

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}_3$ et α et β deux réels.

1. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$.
2. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.
3. $\alpha(\beta\vec{u}) = \beta(\alpha\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$.

II- Vecteurs colinéaires dans l'espace

1- Deux vecteurs colinéaires

Définition

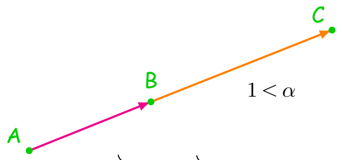
On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}_3$ sont **colinéaires** s'il existe un réel α tel que :

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \alpha\vec{u}$$

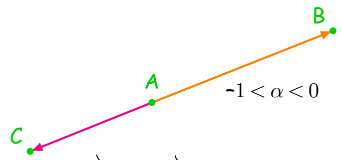
Propriété

Soit A, B et C trois points de l'espace.

les points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, ou encore $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC}$, où α est un réel.



- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont le même sens



- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont des sens opposés

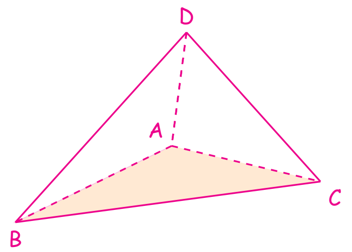
Applications

Soit OABC un tétraèdre. On considère les points I, E et F tels que :

$2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA}$, $3\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC}$.

1. Montrer que : $\overrightarrow{IF} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

2. En déduire que les points I, E et F sont alignés.



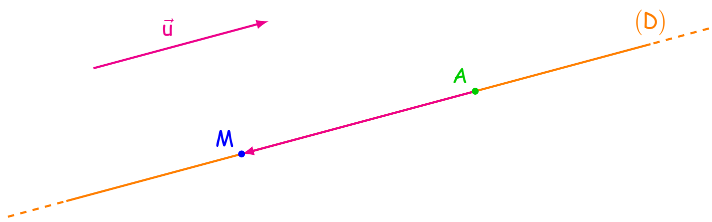
2- Caractérisation vectorielle d'une droite

Théorème

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}_3$ et A un point de l'espace.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$, où α un réel, est la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, on la noté $D(A,\vec{u})$.

$$M \in D(A,\vec{u}) \iff \left(\exists\alpha \in \mathbb{R}\right) \quad \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$$



Corollaire

1. Une droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$, où α un réel.

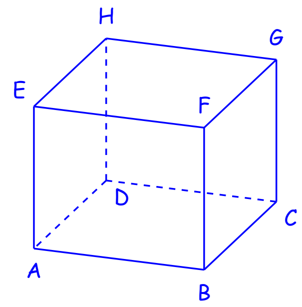
2. Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CD}$, où α est un réel.

Applications

On considère, ci-contre, le cube ABCDEFGH.

Soit I et J les milieux respectifs de $[BG]$ et $[HG]$, et le point K tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.

Montrer que les droites (AJ) et (IK) sont parallèles.



III- Vecteurs coplanaires

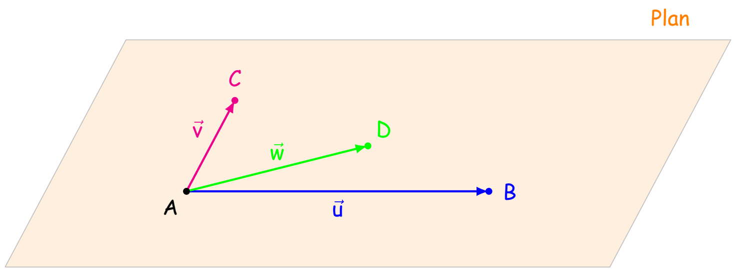
1- Trois vecteurs coplanaires

Définition

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls de $\mathcal{V}_3$. On construit quatre points A, B, C et D tels que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \overrightarrow{AD}$$

On dit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si les points A, B, C et D appartiennent au même plan.

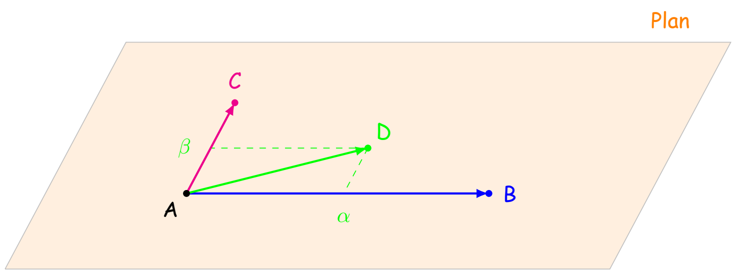


Propriété

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls de $\mathcal{V}_3$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement s'il existe deux réels α et β tels que :

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$



Remarques

◇ Si on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$, on obtient : $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$
Alors, le couple (α, β) sont les coordonnées du point D dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

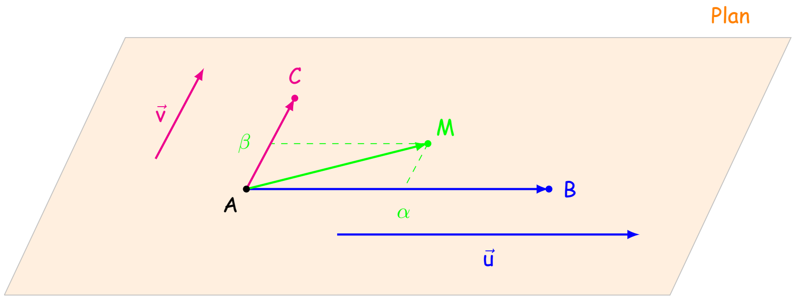
2- Caractérisation vectorielle d'un plan

Théorème

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires, et A un point de l'espace.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, où α et β sont deux réels, est le plan (P) passant par A et les deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on le note $P(A, \vec{u}, \vec{v})$.

$$M \in P(A, \vec{u}, \vec{v}) \iff \exists\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$



Remarques

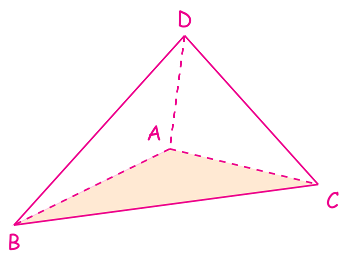
◇ Si on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, on obtient : $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.

Corollaire

Soit A,B et C trois points non alignés se l'espace.
Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$, où α et β sont deux réels.

Applications

On considère, ci-contre, le tétraèdre ABCD.
Soit I et J les milieux respectifs de $[AD]$ et $[AB]$, et les points E et F tels que : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.



1. Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CA}$.

2. En déduire que $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CF}$

3. Montrer que les points I, J, C et F sont coplanaires.

I- Repérage dans l'espace

Dans tout ce qui suit, V_3 désigne l'espace vectoriel.

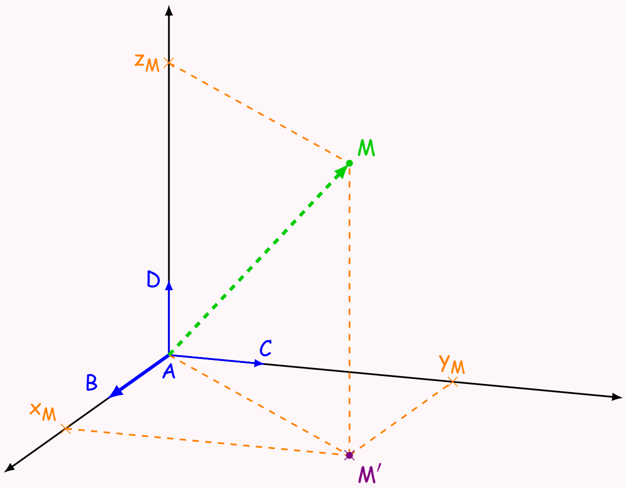
1- Coordonnées d'un point dans un repère

Définition

Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires de l'espace.

1. Les points A, B, C et D déterminent **un repère cartésien** dans l'espace, on le note $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.
2. Pour tout point M de l'espace, il existe trois réels uniques x_M, y_M et z_M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x_M\overrightarrow{AB} + y_M\overrightarrow{AC} + z_M\overrightarrow{AD}$$



a. Les trois réels x_M, y_M et z_M sont appelés les **coordonnées cartésiennes** du M dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$, et on écrit $M(x_M, y_M, z_M)$.

b. x_M correspond à **l'abscisse**, y_M correspond à **l'ordonnée** et z_M correspond à **la côte**.

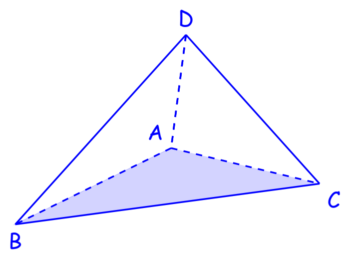
Remarques

◇ Le point M' est la projection orthogonale de M sur le plan (ABC) parallèlement à (AD).

Applications

On considère, ci-dessous, le tétraèdre ABCD.
Soit I le milieu du segment $[BD]$, et J le centre de gravité du triangle ACD.
Déterminer dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$:

1. les coordonnées du point C.
2. les coordonnées du point I.
3. les coordonnées du point J.



2- Coordonnées d'un vecteur dans une base

Définition

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de V_3.

1. les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ constituent **une base** de l'espace vectoriel, notée $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
2. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de V_3, il existe trois réels uniques $x_{\vec{u}}$, $y_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{u}}$ tels que :

$$\vec{u} = x_{\vec{u}}\vec{i} + y_{\vec{u}}\vec{j} + z_{\vec{u}}\vec{k}$$

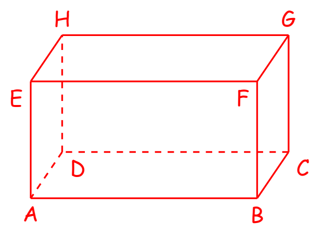
Les trois réels $x_{\vec{u}}$, $y_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{u}}$ sont appelés les **coordonnées** du $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, et on note $\vec{u}(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$.

Propriété

1. Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs dans une base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de V_3 .
   a. Les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(x + x'; y + y'; z + z')$.
   b. Pour tout réel α, les coordonnées du vecteur $\alpha\vec{u}$ sont $(\alpha x; \alpha y; \alpha z)$.
2. Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
   a. les coordonnés du vecteurs $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
   b. Les coordonnées du point I le milieu de $[AB]$ sont $\left(\dfrac{x_B + x_A}{2}; \dfrac{y_B + y_A}{2}; \dfrac{z_B + z_A}{2}\right)$.

Applications

On considère, ci-contre, le parallélépipède rectangle ABCDEFGH.



1. Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EH}$ forment une base de V_3.
2. Déterminer les coordonnées de vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $-3\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{EC}$ dans la base $\left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}\right)$.

II- Vecteurs coplanaires

1- Déterminant de trois vecteurs

Théorème

Soit $\vec{u}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{v}(x_2; y_2; z_2)$ et $\vec{w}(x_3; y_3; z_3)$ trois vecteurs dans une base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de V_3.

Le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, noté $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, est le nombre réel $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$, tel que :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = +x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Remarques

- La formule ci-dessus est obtenue par le développement par rapport à la première colonne.
- Il existe d'autres formules similaires pour calculer le déterminant : on peut développer un déterminant par rapport à n'importe laquelle des trois lignes ou des trois colonnes. Par exemple : Si on développe par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = +x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

2- Trois vecteurs coplanaires

Théorème

Soit $\vec{u}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{v}(x_2;y_2;z_2)$ et $\vec{w}(x_3;y_3;z_3)$ trois vecteurs dans une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de V_3.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$.

Applications

Soit $\vec{u_1}(-1;-2;0)$, $\vec{u_2}(3;5;-1)$, $\vec{u_3}(-5;-5;5)$ et $\vec{u_4}(0;-1;2)$ quatre vecteurs de V_3.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ sont coplanaires.
2. Montrer que les vecteurs $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ et $\vec{u_4}$ sont non coplanaires.

III- Droites dans l'espace

Dans tout ce qui suit, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

1- Représentation paramétrique d'une droite

Soit (D) une droite passant par un point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$.

- Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace, on a :

$$M \in (D) \iff (\exists t \in \mathbb{R})\ \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \iff (\exists t \in \mathbb{R}) \begin{cases} x - x_A = \alpha t \\ y - y_A = \beta t \\ z - z_A = \gamma t \end{cases} \iff (\exists t \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$$

Théorème

Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ un vecteur de V_3.
La droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ admet un système d'équations, appelé **représentation paramétrique**, de la forme :

$$(D) : \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} \quad / t \in R$$

Applications

Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par les deux points $A(2;0;1)$ et $B(2;3;2)$.

2- Deux équations cartésiennes d'une droite

Théorème

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ un vecteur de V_3.
La droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ admet un système de deux équations cartésiennes de la forme :

1. Si $\alpha\beta\gamma \neq 0$, on a : $\dfrac{x-x_A}{\alpha} = \dfrac{y-y_A}{\beta} = \dfrac{z-z_A}{\gamma}$

2. Si $\alpha = 0$ et $\beta\gamma \neq 0$, on a : $\begin{cases} \dfrac{y-y_A}{\beta} = \dfrac{z-z_A}{\gamma} \\ x = x_A \end{cases}$

3. Si $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, on a : $\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \end{cases}$

Applications

Déterminer deux équations cartésiennes de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ dans chacun des cas suivants :

1. $A(1;5;-2)$ et $\vec{u}(-2;3;1)$.
2. $A(3;-2;0)$ et $\vec{u}(2;0;-1)$.
3. $A(-1;-2;8)$ et $\vec{u}(6;0;0)$.

IV- Plans dans l'espace

1- Équation cartésienne d'un plan

Soit (P) un plan passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ et $\vec{v}(\alpha';\beta';\gamma')$.

◇ Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace, on a :

$$\begin{aligned} M \in (P) &\iff \det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}) = 0 \iff \begin{vmatrix} (x-x_A) & \alpha & \alpha' \\ (y-y_A) & \beta & \beta' \\ (z-z_A) & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (x-x_A)\begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix} - (y-y_A)\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix} + (z-z_A)\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff ax+by+cz+d = 0 \end{aligned}$$

où $a = \begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}$ et $b = -\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}$ et $c = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}$ et $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.

Théorème

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ et $\vec{v}(\alpha';\beta';\gamma')$ deux vecteurs non colinéaire de V_3.

1. Le plan (P) passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ a une équation cartésienne de la forme :

$$ax+by+cz+d = 0$$

où $a = \begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}$ et $b = -\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}$ et $c = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}$ et $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.

2. L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que $ax+by+cz+d = 0$, où $(a;b;c) \neq 0$, est un plan de l'espace.

Applications

Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par $A(1;2;3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(\sqrt{2};0;-1)$ et $\vec{v}(0;1;\sqrt{2})$.

2- Représentation paramétrique d'un plan

Soit (P) un plan passant par un point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ et $\vec{v}(\alpha';\beta';\gamma')$.

◇ Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace, on a :

$$\begin{aligned} M\in(P) &\iff \left(\exists\,(t_1;t_2)\in\mathbb{R}^2\right)\quad \overrightarrow{AM}=t_1\vec{u}+t_2\vec{v} \\ &\iff \left(\exists\,(t_1;t_2)\in\mathbb{R}^2\right)\quad \begin{cases} x-x_A=\alpha t_1+\alpha' t_2 \\ y-y_A=\beta t_1+\beta' t_2 \\ z-z_A=\gamma t_1+\gamma' t_2 \end{cases} \\ &\iff \left(\exists\,(t_1;t_2)\in\mathbb{R}^2\right)\quad \begin{cases} x=x_A+\alpha t_1+\alpha' t_2 \\ y=y_A+\beta t_1+\beta' t_2 \\ z=z_A+\gamma t_1+\gamma' t_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Théorème

Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l 'espace et $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ et $\vec{v}(\alpha';\beta';\gamma')$ deux vecteurs non colinéaire de V_3. Le plan (P) passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admet un système d'équations paramétriques, appelé représentation paramétrique de la forme :

$$(P):\begin{cases} x=x_A+\alpha t_1+\alpha' t_2 \\ y=y_A+\beta t_1+\beta' t_2 \\ z=z_A+\gamma t_1+\gamma' t_2 \end{cases}\qquad /\,(t_1;t_2)\in\mathbb{R}^2$$

Applications

1. Déterminer une représentation du plan (P) passant par $A(5;5;5)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(0;0;-1)$ et $\vec{v}(\sqrt{5};1;\sqrt{5})$.
2. Déterminer une représentation du plan (Q) d'équation cartésienne $2x-y+4z-1=0$.

V- Positions relatives de droites et plans

1- Deux droites

Théorème

Soit $D(A,\vec{u})$ et $\Delta(B,\vec{v})$ deux droites de l'espace.

1. Les droites (D) et (Δ) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. Les droites (D) et (Δ) sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

Applications

Soit $M(1;-3;2)$ et $N(0;-1;1)$ deux points, et (Δ) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=-1-t \end{cases}\qquad /\,t\in\mathbb{R}$$

1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune des droites (MN) et (Δ).
2. les droites (MN) et (Δ) sont-elles parallèles ? coplanaires ?

2- Deux plans

Théorème

Soit $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $Q(B, \vec{u'}; \vec{v'})$ deux plans de l 'espace.
Les plans (P) et (Q) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$ sont coplanaires, ou encore :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u'}) = 0 \quad \text{et} \quad \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v'}) = 0$$

Remarques

◇ Si les plans (P) et (Q) sont sécants, alors leur intersection est une droite.

Applications

1. Étudier la position relatives des plans (P) et (Q) des équation respectives $-2x + 2y - 4z - 1 = 0$ et $x - y + 2z = 0$.
2. On considère les deux plans $(P) : x - y + 2z + 1$ et $(Q) : x - 4y + 3y = 0$
   a. Prouver que les droites (Q) sont sécants.
   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite de leur intersection.

3- Droite et plan

Théorème

Soit $D(A, \vec{u})$ une droite et $P(B, \vec{v}; \vec{w})$ un plan de l 'espace.
La droite (D) est parallèle au plan (P) si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ; c'est à dire :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Remarques

◇ Si (D) est parallèle au plan (P), et il existe un point de (D) appartient à (P), alors la droite (D) est incluse dans (P).

Applications

1. Étudier la position relative des plans (P) et (Q) des équation respectives $-2x + 2y - 4z - 1 = 0$ et $x - y + 2z = 0$.
2. On considère les deux plans $(P) : x - y + 2z + 1$ et $(Q) : x - 4y + 3y = 0$
   a. Prouver que les droites (Q) sont sécants.
   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite de leur intersection.

Propriété

Soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ et (P) un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, où $(a; b; c) \neq 0$ de l 'espace.

La droite (D) est parallèle au plan (P) si et seulement si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.

Applications

On considère le plan $(P) : 3x - 2y + z + 5 = 0$ et la droite (D) de représentation paramétrique ::

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t \\ z = -1 - +2t \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}$$

Étudier la position relative de (P) par rapport à (D).