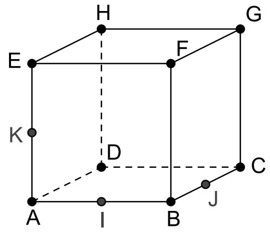
Géométrie dans l'espace – Exercices

Positions relatives de droites et plans

1 $ABCDEFGH$ est un cube.
Un plan P coupe le plan (EFG) selon une droite Δ et le plan (ABC) selon une droite Δ'.
Que peut-on dire de Δ et Δ' ?

2 Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires.
1. Justifier que A, B, C ne sont pas alignés.
2. Déterminer l'intersection des plans (ABC) et (BCD).

3 $ABCDEFGH$ est un cube et I, J, K sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[BC]$ et $[AE]$.



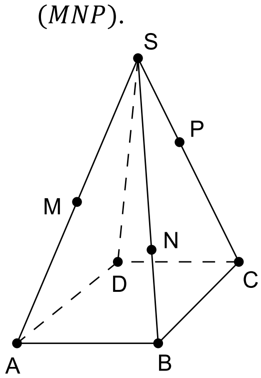
1. Citer sans justifier :
- **a.** deux droites sécantes ;
- **b.** deux droites parallèles ;
- **c.** deux droites non coplanaires.

2. Préciser, en justifiant, la position relative :
- **a.** des droites (FC) et (AF) ;
- **b.** des droites (CI) et (AE) ;
- **c.** des droites (EB) et (HC).

3. Préciser, en justifiant, la position relative :
- **a.** de la droite (IJ) et du plan (HGF) ;
- **b.** de la droite (CD) et du plan (HEA) ;
- **c.** de la droite (HK) et du plan (ABE) ;
- **d.** de la droite (AB) et du plan (HIJ).

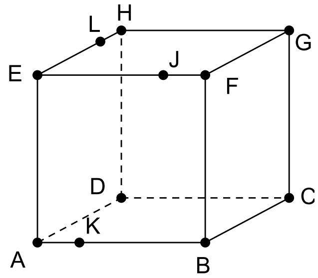
4. Préciser, en justifiant, la position relative :
- **a.** des plans (DKH) et (FBJ) ;
- **b.** des plans (AEF) et (AEG) ;
- **c.** des plans (BDC) et (EAH) ;
- **d.** des plans (ADG) et (EBC) ;
- **e.** des plans (DIF) et (DBH).

4 On considère la pyramide $SABCD$ ci-dessous. Compléter la figure au fur et à mesure.
1. Déterminer le point d'intersection U de la droite (NP) et du plan (ABC).
2. Déterminer le point d'intersection V de la droite (MN) et du plan (ABC).
3. En déduire l'intersection des plans (MNP) et (ABC).
4. Déterminer le point d'intersection W de la droite (DC) et du plan (MNP).
5. En déduire l'intersection du plan (MNP) et de la face (SDC).
6. Déterminer la section de la pyramide $SABCD$ par le plan (MNP).

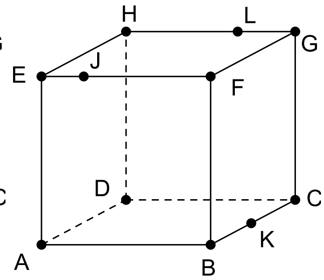


5 Construire les sections des cubes et tétraèdres suivants. Pour les trois cubes, le plan de section est (JKL).

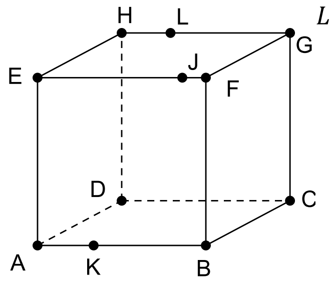
a.



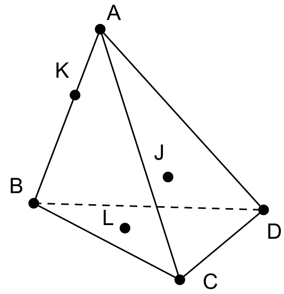
b.



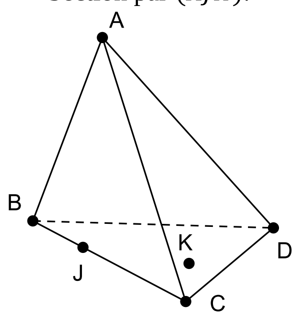
c.



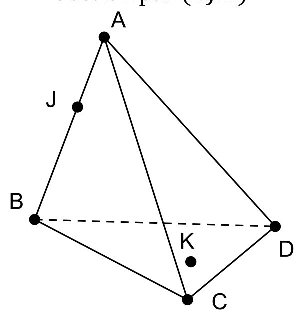
d. $K \in [AB]$, $J \in (ABD)$ et $L \in (BCD)$.
Section par (JKL)



e. $J \in [BC]$ et $K \in (BCD)$.
Section par (AJK).



f. $J \in [AB]$ et $K \in (BCD)$.
Section par (AJK)

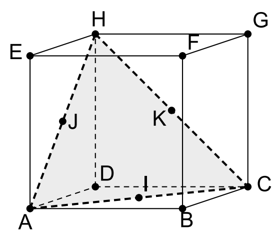


6 *(2008, Asie)*. Vrai ou faux ? Justifier. Dans le cas d'une proposition fausse la démonstration consistera à proposer un contre-exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exemple.
P_1, P_2, P_3 désigne des plans distincts de l'espace et D une droite.
1. Si $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ et $P_2 \cap P_3 \neq \emptyset$, alors $P_1 \cap P_3 \neq \emptyset$.
2. Si $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \emptyset$, alors $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ et $P_2 \cap P_3 = \emptyset$.
3. Si $P_1 \cap D \neq \emptyset$ et $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, alors $P_2 \cap D \neq \emptyset$.

Orthogonalité

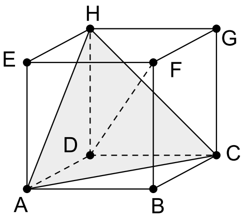
7 $ABCDEFGH$ est un cube. En utilisant la définition, démontrer l'orthogonalité des droites :
a. (AB) et (DH) **b.** (AC) et (FH) **c.** (DC) et (FG)

8 Soit $ABCDEFGH$ un cube et I, J, K les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AH]$ et $[HC]$.
Montrer que les droites (IJ) et (DK) sont orthogonales.



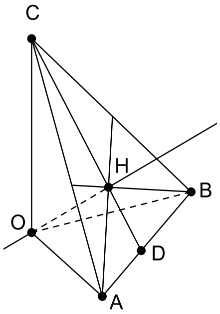
9 $ABCDEFGH$ est un cube et M un point de la droite (AD). Montrer que le triangle GCM est rectangle.

10 $ABCDEFGH$ est un cube.



1. Démontrer l'orthogonalité de la droite (CH) et du plan (ADG).
2. En déduire que les droites (CH) et (DF) sont orthogonales.
3. Démontrer que la droite (DF) est orthogonale au plan (ACH).

11 $OABC$ est un tétraèdre trirectangle en O, c'est-à-dire que les triangles OAB, OAC, OBC sont rectangles en O.



Soit H l'orthocentre du triangle ABC.

1. Démontrer que les droites (AB) et (OH) sont orthogonales.
2. Démontrer que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC).

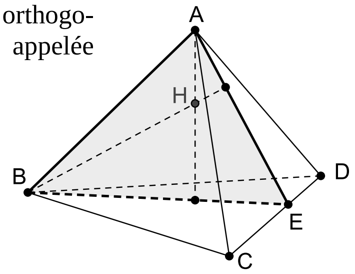
12 **Tétraèdres orthocentriques**

Un tétraèdre $ABCD$ possède six arêtes

(AB) et (CD), (BC) et (AD), (CA) et (BD)

qui déterminent trois paires d'arêtes dites « opposées ».

La droite passant par A et orthogonale au plan (BCD) est appelée hauteur issue de A, on la note (h_A). On définit de même (h_B), (h_C), (h_D).

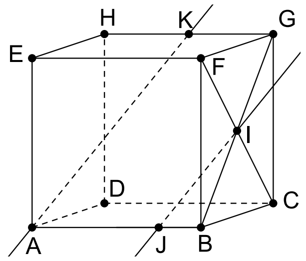


Le tétraèdre $ABCD$ est dit orthocentrique si les quatre hauteurs sont concourantes.

1. On suppose que (h_A) et (h_B) ont un point commun H.
   - **a.** Montrer que (h_A) et (h_B) définissent un plan (P) et que (CD) est perpendiculaire à (P).
   - **b.** En déduire que (AB) et (CD) sont orthogonales.
   - **c.** Soit $E = (P) \cap (CD)$. À l'aide de triangles rectangles, montrer que
     $$AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2 = EC^2 - ED^2.$$
2. Montrer que dans un tétraèdre orthocentrique, le pied de la hauteur sur une face est l'orthocentre de cette face et que $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.
3. Réciproquement, on suppose que (AB) et (CD) sont orthogonales. Soit E le pied de la hauteur issue de B dans le triangle BCD.
   - **a.** Montrer que les hauteurs issues de A et B dans le triangle ABE sont des hauteurs du tétraèdre.
   - **b.** En déduire que (h_A) et (h_B) sont sécantes en un point H.
   - **c.** Montrer que (AB) est perpendiculaire à (CDH).
   - **d.** En déduire que (CH) et (AB) sont orthogonales, ainsi que les droites (DH) et (AB).
4. On suppose de plus que (AC) et (BD) sont orthogonales.
   - **a.** Montrer que (CH) est la hauteur issue de C du tétraèdre.
   - **b.** Déduire de **1.** que (AD) et (BC) sont orthogonales.
   - **c.** En déduire que (DH) est la quatrième hauteur du tétraèdre.
   - **d.** Énoncer une condition suffisante pour qu'un tétraèdre soit orthocentrique.

Vecteurs de l'espace

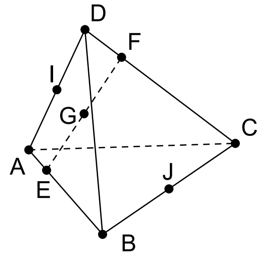
13 $ABCDEFGH$ est le cube représenté ci-contre. I est le centre de la face $BCGF$, K est le milieu de $[HG]$ et J le point tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.



1. À l'aide de la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{JI}$.
2. Que peut-on en déduire pour les deux droites (AK) et (IJ) ?

14 $ABCD$ est un tétraèdre et λ un réel. Soit I et J les milieux respectifs de $[AD]$ et $[BC]$. On définit E et F par $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \lambda\overrightarrow{DC}$

Soit G le milieu de $[EF]$.



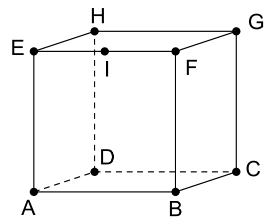
1. **a.** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{GE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$.
   b. Exprimer de même le vecteur $\overrightarrow{GF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{GD}$ et $\overrightarrow{GC}$.
2. **a.** Démontrer que $(1-\lambda)\overrightarrow{GI} + \lambda\overrightarrow{GJ} = \vec{0}$.
   b. En déduire que I, J et G sont alignés.

15 $ABCD$ est un tétraèdre, G est le centre de gravité de la face ACD et M est le point tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

- **a.** Démontrer que la droite (MG) est la parallèle à la droite (BI) où I est le milieu de $[CD]$.
- **b.** En déduire que la droite (MG) est parallèle au plan (BCD).

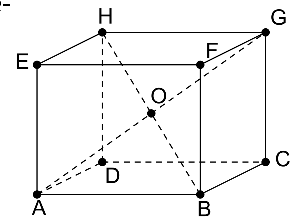
Vecteurs coplanaires et base de l'espace

16 $ABCDEFGH$ est le cube ci-contre, I est le milieu de l'arête $[EF]$. Dans chaque cas, dire si les vecteurs sont coplanaires ou non et justifier.



- **a.** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DG}$;
- **b.** $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{EI}$;
- **c.** $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{IA}$;
- **d.** $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{CI}$;

17 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle de centre O.



- **a.** Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.
- **b.** Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont-ils coplanaires ?

18 Soit $\vec{u}(-2;3;1)$, $\vec{v}(1;0;3)$ et $\vec{w}(1;2;-1)$.

1. Montrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
2. Exprimer $\vec{t}(1;7;2)$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

19 On considère les vecteurs $\vec{u}(0;-1;1)$, $\vec{v}(-2;-1;3)$, $\vec{w}(-1;-1;-1;)$ et $\vec{t}(-2;1;1;)$.

Les triplets $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ et $(\vec{u},\vec{v},\vec{t})$ sont-ils des bases de l'espace ?

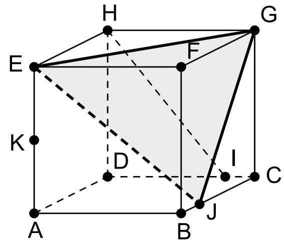
Repérage dans l'espace

20 Montrer que les points de coordonnées $A(-2;-1;6)$, $B(1;3;5)$ et $C(13;19;1)$ sont alignés.

21 On considère les points $A(-1;-4;5)$, $B(2;0;3)$, $C(-8;-11;-8)$ et $D(-4;-15;12)$.

1. Donner les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$.
2. Les points A, B, M sont-ils alignés ?

22 $ABCDEFGH$ est le cube ci-contre. On considère les points I et J définis par $\overrightarrow{DI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.
On munit l'espace du repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Déterminer les coordonnées des points E, G, H, I et J.
2. **a.** Démontrer qu'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{HI} = x\overrightarrow{EG} + y\overrightarrow{EJ}$.
   b. En déduire que (HI) est parallèle à (EGJ).

23 Montrer que les points $A(1;2;3)$, $B(3;2;6)$, $C(1;4;2)$ et $D(-1;4;-1)$ sont coplanaires.

24 Montrer que les points $A(-4;5;-1)$, $B(-1;5;-4)$, $C(-2;12;4)$ et $D(4;12;-2)$ sont coplanaires.

25 Soit $A(1;2;4)$, $B(3;1;3)$ et $C(2;6;5)$.

1. Démontrer que A, B, C ne sont pas alignés.
2. Démontrer que le point $D(a;b;c)$ appartient au plan (ABC) si et seulement si $a - b + 3c = 11$.

26 Soit les points $A(3;2;1)$, $B(10;6;-1)$, $C(9;8-9)$ et $D(2;4;-7)$.

1. Démontrer que ces points sont coplanaires.
2. Montrer que $ABCD$ est un losange.

27 $ABCDEFGH$ est un cube, I est le centre de gravité du triangle BEG. En se plaçant dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ montrer que les points D, I, F sont alignés.

Représentations paramétriques

28 Soit (d) la droite passant par $A(2;7;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;2;-2)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de (d).
2. Déterminer le point d'ordonnée 3 de la droite (d).

29 Donner une représentation paramétrique de (AB) dans chacun des cas suivants.

a. $A(2;-1;3)$ et $B(0;2;4)$.
b. $A(1;2;3)$ et $B(-1;-2;2)$.

30 Soit (d) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -2 + t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - 5t \end{cases}$$

1. Le point $A(-2;-4;13)$ appartient-il à (d) ?
2. Soit les points $B(1;4;2)$ et $C(-11;0;22)$. La droite (BC) est-elle parallèle à (d) ?
3. Donner une représentation paramétrique de (BC).

31 Soit (d) et (d') les droites de représentations paramétriques $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 4t, t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 6t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \quad, k \in \mathbb{R}. \\ z = -6 + 2k \end{cases}$
Démontrer que ces droites sont sécantes en un point dont on donnera les coordonnées.

32 Soit (d) et (d') les droites de représentations paramétriques $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 2k \\ y = 3 + k \quad, k \in \mathbb{R}. \\ z = -2 + 3k \end{cases}$
Démontrer que ces droites ne sont pas coplanaires.

33 Soit les points $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$ et $C(4;5;6)$.

1. Justifier que les points A, B, C ne sont pas alignés.
2. Donner une représentation paramétrique du plan (ABC).
3. Le point $D(7;9;11)$ appartient-il au plan (ABC) ?

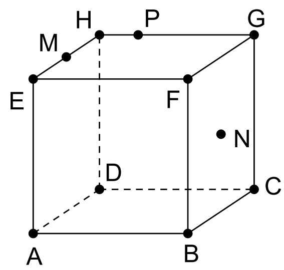
34 Soit $A(-1;3;2)$ et $B(2;1;-2)$.
Déterminer l'intersection de (AB) avec le plan passant par O et dirigé par $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

35 La droite (d) passe par le point $A(0;2;3)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u}(1;1;1)$. La droite (d') passe par les points $B(2;0;-1)$ et $C(4;-2;2)$.
Étudier la position relative de ces droites.

36 Soit les points $A(4;-4;3)$, $B(2;-1;4)$, $C(-3;5;5)$, $D(-2;2;5)$, $E(-4;5;6)$ et $F(3;2;4)$.
Déterminer une équation paramétrique à coefficient entiers de l'intersection des plans (ABC) et (DEF).

37 *(2014, Amérique du Nord)*[1]. On considère un cube $ABCDEFGH$ donné ci-dessous.

On note M le milieu du segment $[EH]$, N celui de $[FC]$ et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.



Partie A – Section du cube par le plan (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L. Construire le point L.
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
   On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
   b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.
2. Déterminer les coordonnées du point L.
3. On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1;1;\frac{5}{8}\right)$.
   Le triangle TPN est-il rectangle en T ?

[1] C'est une bonne idée de démontrer les résultats admis.