Dérivation

I. Dérivabilité en un point

1. Nombre dérivé

Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et a un point de I.

On dit que la fonction f est ***dérivable*** en a s'il existe un nombre réel l tel que $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in\mathbb{R}$ .Le nombre l s'appelle le nombre dérivé de la fonction f en a et se note $f'(a)$

et on écrit $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Exemple :

Soit f une fonction numérique définie par $f(x)=2x^2+2x$

Montrer que la fonction f est dérivable en $a=1$ puis déduire le nombre dérivé en 1

Calculons la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

On a $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}x+3=4$

Donc la fonction f est dérivable en 1 et le nombre dérivé en 1 est 4, et on écrit $f'(1)=4$

Remarque :

Si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ alors f ***n'est pas dérivable*** en a

Application ①

Etudier la dérivabilité de f en a dans les cas suivants :

$f(x)=3x+1$; $a=1$	$f(x)=\frac{x^2-2x}{x+1}$; $a=0$	$f(x)=\sqrt{x-3}$; $a=4$

2. Interprétation géométrique -Equation de la tangente

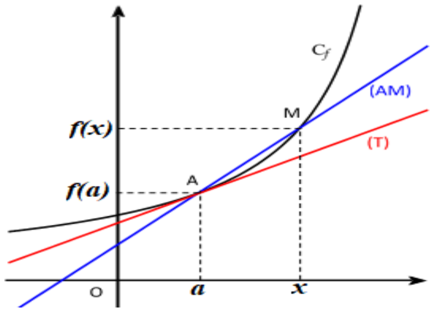
Introduction

Soit f une fonction numérique, dérivable en a et soient $M(x, f(x))$ et $A(a, f(a))$ deux points de la courbe. Le coefficient directeur de la droite (AM) est : $\alpha=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Si le point M se rapproche du point A (x tend vers a), alors la droite (AM) confondue avec la droite (T) de coefficient directeur $f'(a)$

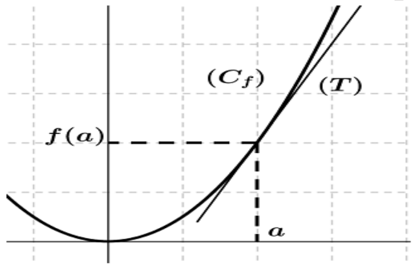
La droite (T) s'appelle ***la tangente*** de la courbe (C_f) en $A(a, f(a))$.

L'équation de la droite (T) est comme suit : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$



Propriété

Soit f une fonction définie sur I et dérivable en a signifié géométriquement que la courbe C_f admet une tangente (T) en a d'équation : $(T): y = f'(a)(x-a)+f(a)$



Exemple

Soit f une fonction définie par $f(x)=2x-3$

Montrons que f est dérivable en 2 puis interpréter les résultats géométriquement

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-3-(4-3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{x-2}=2$$

Donc f est dérivable en 2.

Géométriquement :

La courbe de la fonction admet une tangente en un point $A(2, f(2))$ avec $f(2)=1$

Donc l'équation de la tangente est : $y = f'(2)(x-2)+f(2)=2(x-2)+1=2x-3$

Application②

Déterminer l'équation de la tangente de la fonction f en un point d'abscisse a dans les cas suivants :

a) $f(x)=4x^2-5x+3$; $a=1$

b) $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$; $a=-1$

c) $f(x)=\sqrt{x+1}-4$; $a=3$

II. Dérivabilité à gauche et à droite

1. Définition

Soit f une fonction numérique définie sur I et soit $a \in I$.

On dit que f est dérivable à droite de a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \geq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \in \mathbb{R}$. Le nombre l s'appelle le nombre dérivé de la fonction à droite de a et se note $f_d'(a)$ et on écrit $f_d'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \geq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

On dit que f est dérivable à gauche de a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \leq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l' \in \mathbb{R}$. Le nombre l' s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à gauche de a et se note $f_g'(a)$ et on écrit $f_g'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \leq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Propriété :

Soit f une fonction numérique définie sur I et soit $a \in I$.
On dit que f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche de a et $f_d'(a) = f_g'(a)$ et dans ce cas on écrit $f'(a) = f_d'(a) = f_g'(a)$.

Exemple :

Soit f une fonction définie par $f(x) = |x|$; $a = 0$

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|-0}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1 \qquad (x \geq 0 \Rightarrow |x| = x)$

Donc f est dérivable à droite de 0 et on a $f'_d(0) = 1$.

Et on a $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|-0}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1 \qquad (x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x)$

Donc f est dérivable à gauche de 0 et on a $f'_g(0) = -1$.

Or $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0.

Application ③

On considère les fonctions suivantes : $f(x) = x^3 - x$ et $g(x) = x|x-2|$

1) Etudier la Dérivabilité de la fonction f en 0
2) Etudier la dérivabilité de la fonction g en 2

2. Interprétation géométrique

Propriété

* Si f est dérivable à droite de a alors C_f admet une demi-tangente (T) à droite en a d'équation $(T): y = f_d'(a)(x-a)+f(a)$

* Si f est dérivable à gauche de a alors C_f admet une demi-tangente (T) à gauche en a d'équation $(T): y = f_g'(a)(x-a)+f\left(a\right)$

Application ④:

Soit f une fonction numérique définie par $\begin{cases} f(x) = x^3+1 & ; x > -1 \\ f(x) - x^2+x+2 & ; x \leq -1 \end{cases}$

1) Etudier la dérivabilité de la fonction f en -1

2) Interpréter les résultats graphiquement

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

* Si $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x \geq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en a et C_f admet une demi-tangente (T) à droite de a d'équation $x = a$ dirigé vers le haut.
* Si $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x \geq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en a et C_f admet une demi-tangente (T) à droite de a d'équation $x = a$ dirigé vers le bas.
* Si $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x \leq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ alors f n'est pas dérivable à gauche en a et C_f admet une demi-tangente (T) à gauche de a d'équation $x = a$ dirigé vers le bas.
* Si $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x \leq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ alors f n'est pas dérivable à gauche en a et C_f admet une demi-tangente (T) à gauche de a d'équation $x = a$ dirigé vers le haut.

Exemple :

Soit f une fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$

Etudions la dérivabilité de f à droite de 0

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 0 ; donc la courbe de la fonction f admet un demi-tangente d'équation $x = 0$ et dirigé vers le haut.

Application ⑤

Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 2 ; puis interpréter les résultats.

III. Fonction dérivée

1. Dérivabilité sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I ouvert.

On dit que f est ***dérivable sur I*** s'elle est dérivable ***en tout point*** de l'intervalle I

Remarque :

- La fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$
- La fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle de son ensemble de définition.
- La fonction de la tangente est dérivable sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exemples :

- $f(x)=x^3-5x^2+2$: est une fonction polynomiale alors est dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$: est une fonction rationnelle alors est dérivable sur $\mathbb{R}-\{2\}$
- $f(x)=\sqrt{x}$: est dérivable sur $]0;+\infty[$.
- $f(x)=\cos(x)$: est dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f(x)=\sin(x)$: est dérivable sur $\mathbb{R}$

2. Fonction dérivée d'une fonction sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I.

La fonction qui associée chaque nombre réel ***x*** de I par le réel $f'(x)$ s'appelle ***fonction dérivée*** de la fonction f sur I et se note f' ; et on écrit $\begin{array}{l} f':I\to\mathbb{R} \\ \quad x\mapsto f'(x)\end{array}$

Exemple :

On considère la fonction f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$

Soit $x_0\in\mathbb{R}$. On a $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0{}^2}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}x+x_0=2x_0$

Donc f est dérivable en x_0 et le nombre dérivé est $f'(x_0)=2x_0$ (l'image de x_0 par la fonction f'

Par conséquent f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x\in\mathbb{R});\, f'(x)=2x$

Application⑥

Soit f fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3$

Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R});\, f'(x)=6x^2$

3. Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	D_f	**La dérivée** f'	$D_{f'}$
$f: x \mapsto k \; ; (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto 0 \; ; (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$f: x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$f: x \mapsto ax$	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$f: x \mapsto x^n \; ; (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto nx^{n-1} \; ; (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$
$f: x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f': x \mapsto \frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f: x \mapsto 1/x^n \; (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$f': x \mapsto -n/x^{n+1} \; (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$
$f: x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$f': x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f: x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f: x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f: x \mapsto \tan(x)$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$f': x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exemple

$f(x) = x^5$ On a f une fonction polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc $(\forall x \in \mathbb{R});\; f'(x) = (x^5)' = 5x^4$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$: on a f une fonction rationnelle donc est dérivable sur $D_f = \mathbb{R}^*$;

Donc $f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{-2}{x^3}$

4. Opération sur les fonctions dérivées :

Propriété :

Si f et g deux fonctions dérivables sur un I alors la fonction :

- $f+g$ est dérivable sur I et on a $(\forall x \in I);(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- kf est dérivable sur I et on a $(\forall x \in I);(k \times f)'(x) = k \times f'(x)$
- $f \times g$ est dérivable sur I et on a $(\forall x \in I);(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x)$
- $\frac{1}{f}$ est dérivable en tout point de I telle que $f(x) \neq 0$ et on a $(\forall x \in I);\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$
- Si f est positive alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a $(\forall x \in I);\left(\sqrt{f}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f}}$
- f^n est dérivable sur I et on a $(\forall x \in I);\left(f^n\right)'(x) = n \times f'(x) \times f^{n-1}(x) \;\; (n \in \mathbb{N}^*)$

- $\frac{f}{g}$ est dérivable en tout point de I telle que $g(x)\neq 0$ et on a $(\forall x\in I);\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\times g-g'\times f}{g^2}$

Application ⑦ :

Etudier la dérivabilité de la fonction f sur et I déterminer sa fonction dérivée f'

$f(x)=(3x^2+2)\sqrt{x}$; $I=\mathbb{R}_+^*$; $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$; $I=\mathbb{R}$

$f(x)=(x^3-1)^6$; $I=\mathbb{R}$; $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$; $I=\left]-1;+\infty\right[$

$$f(x)=\frac{2x^4}{(x+2)^2} \qquad I=\mathbb{R}-\{2\}$$

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur I et soient a et b deux nombres réels.

Soit J l'ensemble des nombres réel x tel que $(ax+b)\in J$.

La fonction $x\mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur I et on a $(\forall x\in J);(f(ax+b))'=af'(ax+b)$

Application⑧

Calculer $f'(x)$ dans les cas suivants :

$\otimes f(x)=\sin(3x+2)$; $\otimes f(x)=\tan(2x-1)$; $\otimes f(x)=\cos(2x^2-4x+1)$

5. Dérivées successives d'une fonction

Définition

Soit f une fonction dérivable sur I.

- Si f' est dérivable su I alors sa dérivée s'appelle la ***dérivée seconde*** de la fonction f sur I et se note f''
- De même on peut définir la dérivée à l'ordre n $(n\geq 2)$ et se note $f^{(n)}$ telle que : $(\forall x\in I);\ f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}\right)'$

Application ⑨

Déterminer la dérivée seconde et la troisième dérivée de la fonction $f(x)=3x^3-2x^2+5$

IV. Applications de la dérivation

1. La fonction dérivée et sens de variations

Propriété :

Soit une fonction f' dérivable sur un intervalle I et x un élément de I

- ✱ Si $f'(x) = 0$, alors la fonction est ***constante*** sur I
- ✱ Si $f'(x) \succ 0$ alors la fonction f est ***strictement croissante*** sur I.
- ✱ Si $f'(x) \prec 0$ alors la fonction f est ***strictement décroissante*** sur I.

Exemple :

Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

On a $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x+1)^2$

On résoudre l'équation $f'(x) = 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Donc $f'(-1) = 0$; Or $(\forall x \in \mathbb{R}); (x+1)^2 \geq 0$

Donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Application①⓪

Etudier les variations de la fonction f dans les cas suivants :

$\otimes f(x) = x^3 - 6x + 1$; $\otimes f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-4}$

2. *Extremum d'une fonction dérivable*

Propriété :

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I et $a \in I$

- Si f admet un extremum en a alors $f'(a) = 0$
- Si $f'(a) = 0$ et f' ***change le signe*** en a alors f admet un extremum en a .

Remarque :

- ✱ Si $f'(a) = 0$ n'implique pas forcément que f admet un extremum en a .
- ✱ Si $f'(a) = 0$ alors la courbe de la fonction f admet une tangente horizontale en un point $A(a, f(a))$

Exemple :

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$

On a $(\forall x \in \mathbb{R});\ f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3)$

Or $(\forall x \in \mathbb{R}); 2x^2 \geq 0$; alors le signe de $f'(x)$ est le signe de $2x-3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Ou $x = \frac{3}{2}$

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\frac{11}{16}$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $f'(0) = 0$ mais $f(0) = 1$ n'est pas un extremum car f' ne change pas le signe en 0

$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ et f' Change le signe en $\frac{3}{2}$ donc f admet une valeur minimale (extremum) en $\frac{3}{2}$ qui est $\frac{-11}{16}$.

Application ①①

Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .
2) Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$
3) Etudier les variations de la fonction f
4) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
5) Déduire les extremums de la fonction f .

V. ***Equation différentielle*** $y'' + \omega^2 y = 0$

Définition

Soit $\omega \in \mathbb{R}$

Une équation différentielle, est toute équation $y'' + \omega^2 y = 0$ dont l'inconnu est la fonction y et y'' sa dérivée secondaire.

$\forall x \in \mathbb{R}$, toute fonction f dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'égalité $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ s'appelle la solution d'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$.

Exemple :

$y''+4y=0$: Est une équation différentielle telle que $\omega=2$

Propriété

Soit $\omega\in\mathbb{R}$

La solution générale de l'équation différentielle $y''+\omega^2y=0$ est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par : $y:x\to\alpha\cos(\omega x)+\beta\sin(\omega x)$ où $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{R}$

Application ①②

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$y''+16y=0$; $y''=-y$; $2y''+9y=0$; $y''=0$