Dérivation - Exercices

Exercice 1 :

Calculer le nombre dérivé de la fonction f en a :

1. $f(x) = -x^2 + x + 1$ en $a = 2$ puis en $a = -1$
2. $f(x) = (x+3)(2x-1)$ en $a = -1$

Exercice 2

1. Soit f la fonction définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x}{x-1}$.
   Calculer le nombre dérivé de f en 2 et en déduire l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 2.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + x - 3$
   Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse -1.

Exercice 3 : voir les réponses à la fin de la feuille d'exercices

Trouver la fonction dérivée de la fonction f définie par :

1. $f(x) = x^2 - 1 + \dfrac{3}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{5}{x^2} + 4x + 17$
3. $f(x) = 4\sqrt{x} - 1$
4. $f(x) = \dfrac{-18}{3x^5 + x^4 - 7x^3 + 15}$
5. $f(x) = \dfrac{4x-3}{8x^3+10}$
6. $f(x) = (3x^5 - 15x^3 + 8x - 3)(x^8 + x^4 - 18)$

Exercice 4

Soit $f : x \mapsto -4x^2 + x - 10$

1. Préciser l'ensemble de définition de f et l'ensemble de dérivabilité.
2. Déterminer la fonction dérivée f'.
3. Quel est le nombre dérivé de f en – 5 ?
4. Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 ?

Exercice 5 :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{2x^2 - 4x + 2}$ $\quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{1\}$

1. Préciser l'ensemble de dérivabilité.
2. Déterminer la fonction dérivée f'.
3. Quel est le nombre dérivé de f en 3 ?
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse – 1 ?

Exercice 6 : voir les réponses à la fin de la feuille d'exercices

Etudier le sens de variation de chacune des fonctions f suivantes sur leur ensemble de définition :

a. $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$ $\quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

b. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ $\quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{3\}$

c. $f(x) = \dfrac{5x+2}{-2x+3}$ $\quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

d. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 3x - 3}{x-2}$ $\quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{2\}$

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 12x^2 + 21x + 100$

1. Etudier le sens de variation de f sur son ensemble de définition.
2. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les éventuelles asymptotes.
3. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Etudier la limite de f en – 1 et préciser l'éventuelle asymptote.

3. Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a + \dfrac{b}{x+1}$ avec a et b deux réels.

   En déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et préciser les éventuelles asymptotes.
4. Etudier le sens de variation de f sur son ensemble de définition.
5. Résumer ces résultats dans un tableau de variation.
6. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+x-5}{x-2}$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Etudier la limite de f en 2 et préciser l'éventuelle asymptote.
3. Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$ avec a, b et c trois réels. En déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
4. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x+3$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f.

   Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.
5. Etudier les variations de f sur $\mathscr{D}_f$.
6. Résumer ces résultats dans un tableau de variation.
7. Tracer $\mathscr{C}_f$.

Exercice 10 : $\boxed{\text{Activité}}$

Objectif : *Etudier la validité de l'approximation affine d'une hausse en pourcentage*

1. a. Les affirmations suivantes vous paraissent-elles justes ?
   - Ce secteur industriel a vu son chiffre d'affaires croître de 4% cette année. Ce chiffre a donc été multiplié par 1,04.
   - Les frais d'une société ont augmenté de 3%. Ils ont donc été multipliés par 1,03.
   - Ce prix vient de subir une hausse de $a\%$. Il a été multiplié par $1 + \dfrac{a}{100}$.

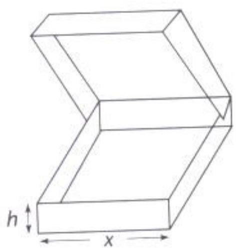
   b. La population d'un département a augmentée de 2,5% l'an dernier. Traduire cette augmentation par une multiplication (on notera p la population initiale).
2. Son comptable a affirmé à Mr Aimable, le boulanger du village, que depuis deux ans la croissance annuelle de ses bénéfices a été de 20%. "Mon bénéfice a augmenté de 40% en deux ans" annonce fièrement Mr Aimable à sa femme. Mr Aimable est-il réaliste, en deçà de la réalité ou exagérément optimiste ?
3. Analyser le raisonnement de Mr Aimable. Qu'aurait-il dit à sa femme si son comptable lui avait annoncé une augmentation annuelle de 2% ? Quel aurait été alors le vrai taux global pour les deux ans ? Existe-t-il une différence importante entre ce taux réel et le taux qu'aurait annoncé Mr Aimable ?

Exercice 11

1. Un fournisseur d'accès Internet (FAI) propose d'un forfait très avantageux. Il compte 100 000 clients. Pour pouvoir rentabiliser son offre, il doit compter 140 000 clients à la fin des 2 premières années. Il a donc calculé que le nombre de ses clients doit augmenter de 20% tous les ans. A-t-il raison ? Si non, de quel pourcentage le nombre de ses clients doit-il augmenter chaque année ?
2. Jean Louis hérite de 30 000 euros. Il place cette somme sur un compte rémunéré au taux mensuel de 0,3%. Il affirme que son argent est placé au taux annuel de 3,6% et qu'il gagnera 1080€ dans un an. Jean Louis a-t-il raison ?

Exercice 12

Pour conditionner des petits fours, un fabricant veut utiliser une boite en carton de contenance 0,5 dm^3. Sa base est un carré de côté x et sa hauteur est notée h (x et h sont exprimés en dm). Par souci d'économie, il souhaite utiliser le moins de carton possible (càd qu'il souhaite que la surface latérale de la boite soit minimale).



1. a. Exprimer h en fonction de x (Indication : utiliser la formule donnant le volume d'un parallélépipède rectangle)

   b. Démontrer que l'aire des neuf faces s'exprime sous la forme $A(x) = 2x^2 + \dfrac{3{,}5}{x}$.
2. a. Etudier les variations de $x \mapsto x^3$ sur $]0 ; +\infty[$

   b. En déduire les solutions de l'inéquation $x^3 \geqslant \dfrac{7}{8}$
3. a. Etudier les variations de la fonction A sur $]0 ; +\infty[$ (indication : utiliser la question 2.b.)

   b. En déduire les dimensions de la boite d'aire minimale.

Exercice 13 : Travaux dirigés

Objectif : *Relier le coût marginal et la dérivée.*

En économie, le supplément de dépense qu'un industriel doit consentir pour fabriquer un objet supplémentaire s'appelle le coût marginal. Cette donnée est importante dans les choix de stratégies commerciales, pour décider par exemple, s'il est intéressant ou non d'augmenter une production.

PARTIE A

Un fabricant de meubles a calculé que pour fabriquer x tables de salle à manger ($100 \leqslant x \leqslant 250$), le coût total est, en euros : $C_T(x) = 5000 + 350x - 0{,}3x^2 + 0{,}002x^3$

1. a. Calculer $C_T(200)$ et $C_T(201)$.
   b. Le coût marginal $C_m(200)$ correspond par définition au coût supplémentaire engendré par la fabrication de la 201$^{\text{ème}}$ table. Déterminer $C_m(200)$
2. a. Déterminer la fonction dérivée $(C_T)'$ de la fonction définie ci-dessus et en déduire $(C_T)'(200)$.
   b. Comparer les valeurs $C_m(200)$ et $(C_T)'(200)$. Que constate-t-on ?
   c. Vérifier que $C_m(200) = \dfrac{C_T(200+h) - C_T(200)}{h}$ avec $h = 1$
   Pourquoi cette égalité donne-t-elle une explication à la constatation de la question 2.b.

Pour les grandes valeurs de x, les économistes assimilent les expressions $C_m(x)$ et $(C_T)'(x)$.
En d'autres termes, pour calculer le coût marginal (pour une production importante),
revient à calculer le nombre dérivé de la fonction coût total.
Dans la suite, on pourra donc remplacer $C_m(x)$ par $(C_T)'(x)$.

PARTIE B

1. Pour la fabrication de x objets, il est naturel de définir le fonction coût moyen par $C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$.
   Dans cette partie, on dispose donc des fonctions coût total (C_T), coût moyen (C_M) et coût marginal (C_m).
   Déterminer $C_M(x)$ (c'est-à-dire la fonction qui pour une production de x tables de salle à manger donne le coût de production d'une table).
2. a. A l'aide d'une calculatrice, représenter graphiquement les fonctions C_m et C_M.
   On prendra $X_{min} = 100$, $X_{max} = 250$, $Y_{min} = 350$ et $Y_{max} = 420$.
   On appelle A le point d'intersection des courbes représentant C_M et C_m. Soit a l'abscisse du point A.
   b. Conjecturer la valeur de $(C_M)'(a)$ à partir d'un graphique.
   Que semble représenter A pour la courbe $\mathscr{C}_{C_M}$?
3. Démontrons cette constatation.
   a. Montrer que $(C_T)'(a) = C_M(a)$. Indication : A est le point….. donc $C_M(a) = \ldots$.(1) Or, on peut remplacer (1) par $(C_T)'(a)$ d'où…
   b. Etablir que $C_T(x) = xC_M(x)$.
   c. Poser $u(x) = x$ pour tout x alors $C_T = u \times C_M$. En utilisant les règles de dérivation d'un produit de fonctions, montrer que $(C_T)'(x) = 1 \times C_M(x) + x \times (C_M)'(x)$
   d. Que peut-on déduire de c. et de a. pour $(C_M)'(a)$? Cela justifie t-il la conjecture du 2.b.

Exercice 14

Un quotidien gratuit est distribué aux usagers des transports en commun. Les frais de fabrication en euros pour x exemplaires de ce quotidien sont donnés par $C(x) = 0{,}0001x^2 - 0{,}4x + 1000$, avec $x \in [0\,;5000]$.
A ces frais s'ajoutent les coûts dûs à la distribution des exemplaires. Ils s'élèvent à 0,2 € par exemplaire.

1. a. Exprimer le coût total de la production $C_T(x)$ pour x quotidiens fabriqués.
   b. Exprimer le coût moyen $C_M(x)$ pour x exemplaires distribués (avec $x \in [1\,;5000]$).
   c. Déterminer le nombre d'exemplaires à distribuer pour avoir un coût moyen minimal.
2. Ce quotidien est financé par la place réservée à la publicité de diverses entreprises. Celles-ci payent, pour x exemplaires, un montant en euros s'évaluant au total à $R(x) = 35\sqrt{x}$
   a. Représenter graphiquement les fonctions C_T et R sur l'intervalle [0 ; 5000]
   b. La production et distribution de ces quotidiens est-elle rentable ?

Exercice 15

Une entreprise fabrique des pizzas comptées par lots de 40 pizzas. On suppose qu'elle vend toute sa production. Les coûts de production sont, d'une part, les coûts fixes (amortissement du four, assurances,…) et d'autre part, les coûts variables (salaires, ingrédients…) qui dépendent du nombre q de lots fabriqués.

On estime que la fonction de coût total de cette entreprise (exprimé en dizaine d'euros) est donnée par la fonction : $C(q)=\frac{1}{2}q^3-2q^2+5q+20$.

Partie A : études du coût marginal et du coût total.

Rappel : le coût marginal est le coût supplémentaire engendré par la production d'une unité supplémentaire. On assimile le coût marginal à la dérivée du coût total.

1. Etudier les variations de C sur l'intervalle [1 ; 8].
2. Etudier les variations de C' sur l'intervalle [1 ; 8].
3. Représenter graphiquement, dans un même repère, les fonctions C et C' (*unités graphiques : 2 cm pour un lot en abscisses et 1 cm pour 5 dizaines d'euros en ordonnées*).

Partie B : Concurrence parfaite

Dans cette partie, on suppose que l'on est en situation de concurrence parfaite, c'est-à-dire que le prix de vente est imposé par le marché. Le prix de vente du lot est calculé à partir du prix de vente unitaire fixé à 7,5 € la pizza.

1. Calculer le prix de vente d'un lot de pizzas. Quelle est la recette $R(q)$ (en dizaine d'euros) pour q lots vendus ?
2. Sur le graphique de la partie A. représenter la droite d'équation $y=30$.
3. "Tant que le coût marginal est inférieur au prix de vente, l'entreprise a intérêt à produire". Expliquer pourquoi.
4. Le bénéfice produit par la vente de q lots de pizzas est $B(q)=R(q)-C(q)$. Etudier les variations de la fonction B et en déduire la production qui assure le bénéfice maximal.
   Que représente cette production sur le graphique précédent ?

Partie C : Concurrence imparfaite

Dans cette partie, on suppose que l'on est en concurrence imparfaite, c'est-à-dire que le prix du marché n'est plus fixe. Le géant américain de la pizza a décidé de s'implanter en France et sa production influe sur le prix de marché qui est alors de $p(q)=-2q+60$ (en dizaine d'euros).

1. Exprimer la recette totale $R_1(q)$ en fonction de q.
2. On appelle recette marginale, la recette provoquée par une unité supplémentaire vendue et cette recette est assimilée à la dérivée de la recette totale.
   Calculer $R'_1(q)$ en fonction de q et représenter graphiquement cette fonction sur la graphique précédent.
3. Le bénéfice produit par la vente de q lots de pizzas est $B_1(q)=R_1(q)-C(q)$.
   Etudier les variations de la fonction B_1 sur [1 ; 8] et en déduire la production qui assure le bénéfice maximal.
   Que représente cette production sur le graphique précédent ?
   Comparer avec le résultat du 4. de la partie B.

ELEMENTS DE CORRECTIONS

Exercice 3

1. $f'(x)=2x-\frac{3}{x^2}$
2. $f'(x)=\frac{-10}{x^3}+4$
3. $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$
4. $f'(x)=\frac{18(15x^4+4x^3-21x^2)}{(3x^5+x^4-7x^3+15)^2}$
5. $f'(x)=\frac{4(8x^3+10)-(4x-3)(24x^2)}{(8x^3+10)^2}$
6. $f'(x)=(15x^4-45x^2+8)(x^8+x^4-18)+(3x^5-15x^3+8x-3)(8x^7+4x^3)$

Exercice 6

a. f est décroissante sur $\left]-\infty\,;\,\frac{3}{10}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{3}{10}\,;\,+\infty\right[$ — $f'(x)=10x-3$

b. f est décroissante sur $]-\infty\,;\,3[$ et sur $]3\,;\,+\infty[$ — $f'(x)=\frac{-5}{(x-3)^2}$

c. f est croissante sur $\left]-\infty\,;\,\frac{3}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$. — $f'(x)=\frac{19}{(-2x+3)^2}$

d. f est croissante sur $]-\infty\,;\,1]$ et sur $[3\,;\,+\infty[$; décroissante sur $[1\,;\,2[$ et sur $[2\,;\,3]$ — $f'(x)=\frac{3(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$