Généralités sur les fonctions numériques

Remarques

I. Généralités

1) Fonction numérique d'une variable réelle

Activité ①:

Considérons un rectangle de longueur $(x-3)cm$ et de largeur $(x-2)cm$ tel que x un réel supérieur à 3.

On désigne par $f(x)$ la surface de ce rectangle.

1) Déterminer l'expression de $f(x)$.

2) Déterminer la surface de ce triangle si $x=4$ et si $x=5$.

3) Déterminer les valeurs possibles de x si $f(x)=12$ puis si $f(x)=20$.

Définition:

Soit D un ensemble de nombre réels. Definir une fonction numérique f sur D revient à associer, à chaque réel x de D, au plus un seul réel, appelé ***image*** de x.

Notations:

- Soit $a\in D$. L'image du nombre a par la fonction f est ***unique*** et se note $f(a)$.
- $f(a)$ se lit « f de a ». La notation suivante se rencontre également $f:x\mapsto f(x)$.
- Si b et l'image de a, on a l'égalité $f(a)=b$ et a est un ***antécédent*** de b par la fonction f.

Application ①:

Considérons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^2-3$.

1) Déterminer les images de $-2, 0$ *et* 2 par f.

2) Déterminer les antécédents, si existent, des nombres $0,5$ *et* -4.

2) Ensemble de définition d'une fonction numérique

Activité ②:

Considérons f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$.

Déterminer les images, si possible, des nombres $0, 1$ *et* -1.

On dit que 1 *et* -1 n'appartiennent pas au domaine de définition de f.

On écrit : $D_f=IR\setminus\{-1,1\}$ et se lit « $\mathbb{R}$ privé de -1 et 1 ».

Définition:

L'ensemble de définition d'une fonction f, noté souvent D_f, est l'ensemble des nombres réels x pour lesquels l'image $f(x)$ est bien définie. On écrit : $D_f=\{x\in IR/\ f(x)\in IR\}$.

Notations:

- On dit qu'une fonction est définie sur un intervalle I si I est inclus dans son ensemble de définition.

- Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction il faut éliminer tous les nombre pour lesquels le dénominateur est nul et ce qui est sous le symbole de la racine carrée est négatif.

Technique :

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux fonctions polynomiales, on a :

Fonction	**Ensemble de définition**
$x \mapsto P(x)$	$D = IR$
$x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$D = \{x \in IR / Q(x) \neq 0\}$
$x \mapsto \sqrt{P(x)}$	$D = \{x \in IR / P(x) \geq 0\}$
$x \mapsto \dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D = \{x \in IR / Q(x) \succ 0\}$
$x \mapsto \dfrac{\sqrt{P(x)}}{Q(x)}$	$D = \{x \in IR / P(x) \geq 0 \; et \; Q(x) \neq 0\}$
$x \mapsto \sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$	$D = \left\{x \in IR / \dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \; et \; Q(x) \neq 0\right\}$
$x \mapsto \dfrac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$	$D = \{x \in IR / P(x) \geq 0 et \;\; Q(x) \succ 0\}$

Exemple :

Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-4}$.

$D_f = \{x \in IR / x - 2 \geq 0 \, et \, x - 4 \neq 0\} = \{x \in IR / x \geq 2 \, et \, x \neq 4\} = [2, +\infty[\setminus \{4\}$

Donc : $D_f = [2, 4[\cup]4, +\infty[$.

✍ Application ②:

Déterminer l'ensemble de définition de fonctions suivantes

- $f_1 : x \mapsto x^3 + 12x - 5$
- $f_2 : x \mapsto \dfrac{-2x+4}{5x+3}$
- $f_3 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{2x^2 + 2x - 4}$
- $f_4 : x \mapsto \dfrac{4x^2 - 5}{\sqrt{2x^2 + 2x - 4}}$
- $f_5 : x \mapsto \dfrac{x+4}{|x| - 3}$
- $f_6 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{2-x}}{|x+2| - 1}$
- $f_7 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{4x+2}}$
- $f_8 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2-x}{4x+2}}$

3) Egalité de deux fonctions numériques

Définition:

Soient f et g deux fonctions et D_f et D_g ses ensembles de définition respectifs.

On dit que f et g sont ***égales*** et on écrit $f = g$ si:

- $D_f = D_g = D$
- $f(x) = g(x)$ pour tout x de D.

❍ Exemples :

✓ Considérons les fonctions f et g définies par $f(x)=\sqrt{x^2}$ et $g(x)=|x|$.

- On a $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}$, donc : $D_f=D_g=\mathbb{R}$.
- Et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|=g(x)$.

Par conséquent : $f=g$.

✓ Considérons les fonctions f et g définies par $f(x)=x$ et $g(x)=\dfrac{x^2}{x}$.

- On a $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}^*$, donc : $D_f\neq D_g$.

Par conséquent : $f\neq g$.

✍ *Application ③:*

Montrer que les fonctions f et g définies par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-4}$ et $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$ sont égales.

4) Représentation graphique d'une fonction numérique

✍ *Activité ③:*

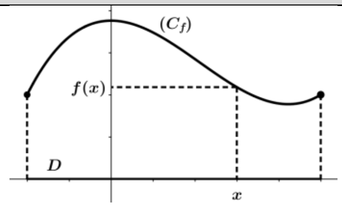
Considérons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x+2$.

Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé.

Définition:

Dans un repère du plan, ***la courbe représentative*** de la fonction f, noté souvent (C_f), est l'ensemble des points $M(x;f(x))$ où x parcourt le domaine de définition D_f de la fonction f.

L'équation de cette courbe est : $y=f(x)$

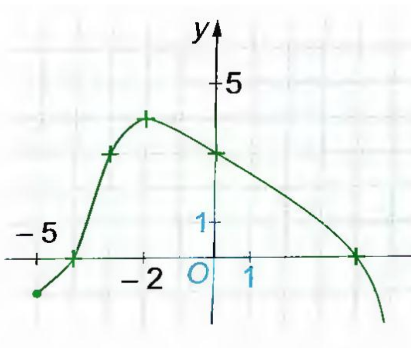


✍ *Application ④:*

Considérons f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

Parmi les points $A(0;0)$, $B(-1;1)$, $C(3;\frac{3}{9})$ *et* $D(2;4)$ déterminer ceux appartiennent à (C_f). Justifier vos réponses.

✍ *Application ⑤:*



Considérons f la fonction définie par sa courbe (C_f) représentée ci-contre :

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Déterminer les images par f des nombres suivants : -5, -4, -3, -4, 0 *et* 4.

3) Par f, quels sont les antécédents de 3 et de 5 ?

4) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère.

❍ Remarques:

Soit f une fonction et (C_f) sa courbe dans un repère du plan.

- Pour déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses, on résoudre l'équation $f(x)=0$ tel que $x \in D_f$.
- Si $0 \in D_f$, alors le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $A(0, f(0))$

Application ⑥:

Considérons f la fonction définie par $f(x)=x^2+2x-8$.

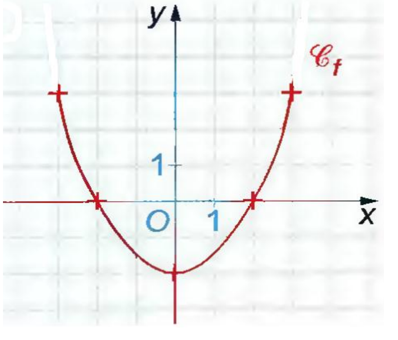
Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère.

5) Parité d'une fonction numérique :

a)-Fonction paire

Activité ④:

Considérons f la fonction définie par sa courbe (C_f) représentée ci-contre :



1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Comparer $f(-2)$ *et* $f(2)$ puis $f(-3)$ *et* $f(3)$.

3) Soit $x \in D_f$, comparer $f(-x)$ *et* $f(x)$.

4) Quelle est la propriété géométrique vérifiée par (C_f) ?

Définition et propriété:

Soient f une fonction numérique et D_f sont ensemble de définition.

❍ On dit que f est ***paire*** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

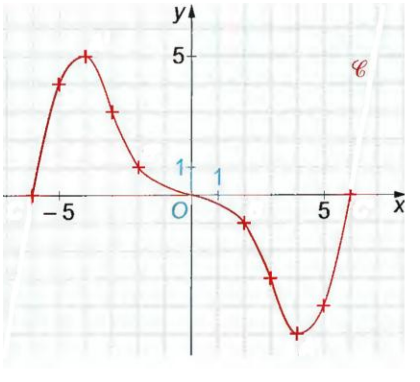
- $-x \in D_f$ pour tout x de D_f. « D_f est symétrique par rapport à 0 ».
- $f(-x)=f(x)$ pour tout x de D_f.

❍ f est paire si et seulement si sa courbe est symétrique par rapport à ***l'axe des ordonnées***.

b)-Fonction impaire

Activité ⑤:

Considérons f la fonction définie par sa courbe (C_f) représentée ci-contre :



1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Est-ce-que f est paire ? Justifier votre réponse.

3) Comparer $f(-2)$ *et* $f(2)$ puis $f(-3)$ *et* $f(3)$ puis $f(-5)$ *et* $f(5)$.

4) Soit $x \in D_f$, comparer $f(-x)$ *et* $f(x)$.

5) Quelle est la propriété géométrique vérifiée par (C_f) ?

Définition et propriété:

Soient f une fonction numérique et D_f sont ensemble de définition.

- On dit que f est ***impaire*** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
  - $-x \in D_f$ pour tout x de D_f. « D_f est symétrique par rapport à 0 ».
  - $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de D_f.
- f est impaire si et seulement si sa courbe est symétrique par rapport à ***l'origine du repère***.

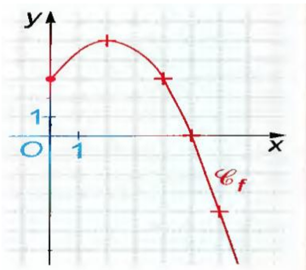
Application ⑦:

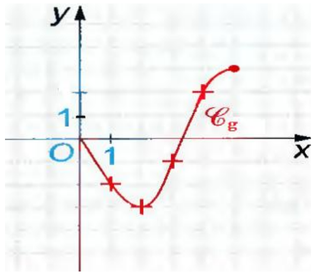
Etudier la parité de fonctions suivantes :

- $f_1 : x \mapsto |x| - \dfrac{1}{x^2}$
- $f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$
- $f_3 : x \mapsto \sqrt{x}+1$
- $f_4 : x \mapsto x^2+x-3$
- $f_5 : x \mapsto |x-1|-|x+1|$
- $f_6 : x \mapsto \sin(x) - x\cos(x)$

Application ⑧:

Considérons f et g les fonctions définies respectivement sur IR et sur $[-5\,;5]$ par ses courbes respectives (C_f) et (C_g) représentées ci-dessous :

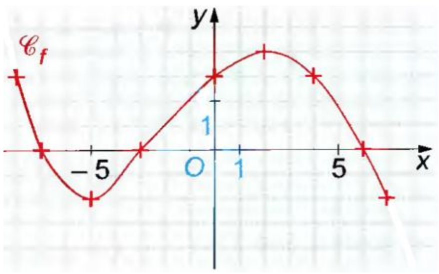




Compléter (C_f) sachant que f est paire et (C_g) sachant que g est impaire.

II. Variations d'une fonction numérique :

Activité ⑥:



Considérons f la fonction définie par sa courbe représentée ci-contre :

1) Donner l'ensemble de définition de f.

2) Compléter le tableau suivant :

x	-7	-6	-5	-3	0	2	4	6	7
$f(x)$									

3) Comment se comport la fonction f lorsque x augmente sur l'intervalle $[-7;-5]$.

On remarque que chaque fois x s'augmente, $f(x)$ se diminue. On dit que f est ***strictement décroissante*** sur l'intervalle $[-7;-5]$.

4) Comment se comport la fonction lorsque augmente sur l'intervalle $[-5;2]$.

On remarque que chaque fois x s'augmente, $f(x)$ s'augmente. On dit que f est ***strictement croissante*** sur l'intervalle $[-5;2]$.

5) Compléter le tableau suivant :

x	-7 $\qquad\qquad$ -5
$f(x)$	$3 \searrow -1$

Ce tableau est appelé ***tableau de variations*** de la fonction .

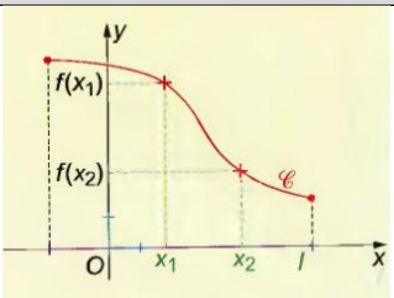
6) Déterminer la valeur maximale et la valeur minimale de la fonction f .

1) Variations d'une fonction numérique :

Définitions:

Soient f une fonction et I un intervalle inclus dans son ensemble de définition .

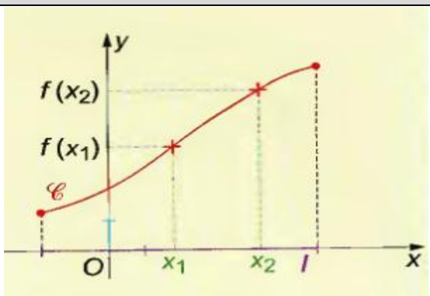
- f est ***strictement croissante*** (resp. ***Croissante***) sur I si pour tous réels a et b appartenant à I tels que $a<b$, on a : $f(a)<f(b)$ (resp. $f(a)\leq f(b)$).
- f est ***strictement décroissante*** (resp. ***Décroissante***) sur I si pour tous réels a et b appartenant à I tels que $a<b$, on a : $f(a)>f(b)$ (resp. $f(a)\geq f(b)$).
- f est ***constante*** sur I si pour tous réels a et b appartenant à I tels que $a<b$, on a : $f(a)=f(b)$.
- f est ***strictement monotone*** (resp. ***Monotone***) sur I s'elle est strictement croissante (resp. *Croissante*) ou strictement décroissante (resp. *Décroissante*) sur I .



Fonction strictement décroissante

$f(x_1)$ et $f(x_2)$ ne sont pas dans le même ordre que x_1 et x_2 .

La fonction f change ordre.



Fonction Strictement croissante

$f(x_1)$ et $f(x_2)$ dans le même ordre que x_1 et x_2 .

La fonction f conserve le même ordre.

Application ⑨:

Considérons f la fonction définie sur IR par : $f(x)=2x^2+3$.

1) Soient a et b deux éléments de l'intervalle $[0,+\infty[$ tels que : $a<b$.

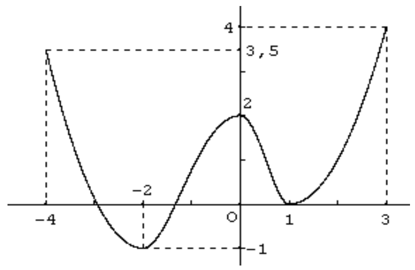
a)-Montrer que : $f(a)<f(b)$.

b)-En déduire la monotonie de f sur $[0,+\infty[$.

2) Etudier la monotonie de f sur $]-\infty,0]$.

Application ⑩:

Dresser le tableau de variation de la fonction f représentée par sa courbe ci-dessous :



2) Taux de variation d'une fonction :

Définition:

Soient f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition et soient a et b deux nombres distincts de D_f .

Le nombre réel $T = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ est appelé ***taux de variation*** de f entre a et b .

Propriété:

Soient f une fonction numérique et T son taux de variation entre deux nombres distincts a et b d'un intervalle I inclus dans son ensemble de définition .

- Si $T > 0$ (resp. $T \geq 0$) pour tous a et b de I , alors f est strictement croissante (resp. Croissante) sur I .
- Si $T < 0$ (resp. $T \leq 0$) pour tous a et b de I , alors f est strictement décroissante (resp. Décroissante) sur I .
- Si $T = 0$ pour tous a et b de , alors f est constante sur I .

Exemples:

- Etudions la monotonie de la fonction f définie sur IR par $f(x) = 4x + 5$.
- Etudions la monotonie de la fonction f définie sur IR par $f(x) = 4$.

Application ①①:

Considérons la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

1) Montrer que le taux de variation de f entre deux nombres distincts a et b de est :
$T = a + b - 6$.

2) Etudier la monotonie de f sur chacun des intervalles $]-\infty; 3]$ et $[3; +\infty[$.

3) Dresser le tableau de variations de f .

3) Monotonie et parité d'une fonction

Propriété:

Soit f une fonction numérique dont son ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à 0 .

Soient I un intervalle de IR^+ inclus dans D_f et J le symétrique de I par rapport à 0 .

⊗ Dans le cas où est f paire, on a :

- Si f est croissante sur I , alors est décroissante sur J .
- Si est décroissante sur I , alors est croissante sur J .

⊗ Dans le cas où f est impaire, on a :

- f a le même sens de variations sur I et sur J .

✍ Application ①②:

Le tableau suivant représente les variations d'une fonction numérique f .

x	-7		-5		0		5		7
$f(x)$	6	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\Vert$				

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

2) Compléter le tableau ci-dessus sachant que f est paire.

3) Compléter le tableau ci-dessus sachant que f est impaire.

✍ Exercice: Exercice ⑨de la série :

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$.

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f .

2) Montrer que f est impaire.

3) Montrer si a et b deux nombres réel distincts non nuls, alors : $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{ba - 4}{ba}$.

4) Etudier les variations de f sur chacun des intervalles $[2, +\infty[$ et $]0, 2]$.

5) En déduire les variations de f sur chacun des intervalles $]-\infty, -2]$ et $[-2, 0[$.

6) Dresser le tableau de variations de f sur D_f.

III. Maximums et Minimums d'une fonction :

Définition:

Soient f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition et I un intervalle inclus dans D_f et a un réel de I .

- On dit que $f(a)$ est le ***minimum*** (ou ***la valeur minimale***) de f sur I si pour tout x de I on a : $f(x) \geq f(a)$.
- On dit que $f(a)$ est le ***maximum*** (ou ***la valeur maximale***) de f sur I si pour tout x de I on a : $f(x) \leq f(a)$.
- On dit que $f(a)$ est un ***extrémum*** de f sur I si $f(a)$ est la valeur maximale ou la valeur minimale de f sur I .

✍ Application ①③:

Soit f une fonction numérique définie sur IR par : $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

1) Calculer $f(1)$.

2) a)-Montrer que : $f(x) \geq 4$ Pour tout $x \in IR$.

b)- qu'est que vous déduisez ?

✍ Exercice:

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$.

1) Calculer $f(2)$ et Calculer $f(-2)$.

2) Montrer que 4 est le minimum de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$

3) Montrer que -4 est le maximum de f sur l'intervalle $]-\infty,0[$.

IV. Résolution graphique des équations et inéquations :

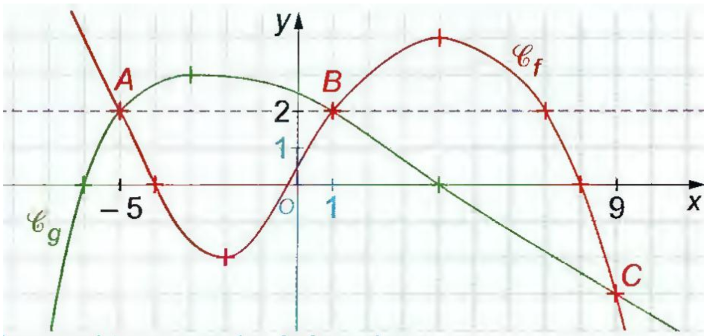
Propriété:

Soient f et g deux fonctions numériques, (C_f) et (C_g) ses courbes respectives dans un repère et a un réel.

- Les solutions de l'équation $f(x)=a$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite horizontale d'équation $y=a$.
- Les solutions de l'inéquation $f(x)\geq a$ (resp. $f(x)\leq a$) sont l'intervalle (ou l'union de celle-ci) formé par les abscisses des points de (C_f) situés ***en dessus*** (resp. ***en dessous***) la droite d'équation $y=a$.
- Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes (C_f) et (C_g) .
- Les solutions de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$ (resp. $f(x)\leq g(x)$) sont l'intervalle (ou l'union de celle-ci) formé par les abscisses des points de (C_f) situés ***en dessus*** (resp. ***en dessous***) de (C_g) .

Application ①④:

Les fonctions f et g sont définies sur IR ; leurs représentations graphiques sont données ci-dessous.



Résoudre graphiquement ce qui suit :

- $g(x)=2$
- $f(x)=2$
- $f(x)\geq 2$
- $g(x)\prec 2$
- $g(x)=f(x)$
- $g(x)\geq 0$
- $g(x)\geq f(x)$
- $g(x)\prec f(x)$

V. Fonctions périodiques- Les fonctions $x\mapsto\cos(x)$ et $x\mapsto\sin(x)$:

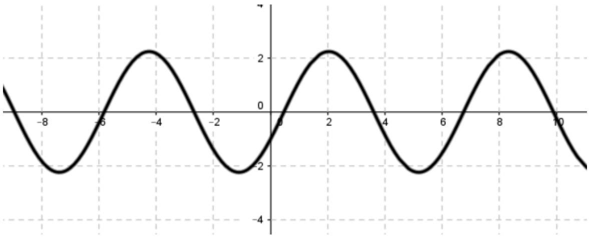
Définition:

Soient f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

On dit que f est ***périodique*** s'il existe un réel T strictement positif tel que :

- $x+T\in D_f$ pour tout x de D_f .
- $f(x+T)=f(x)$ pour tout x de D_f .

On dit que T est une ***période*** de f et que f est ***T-périodique***.



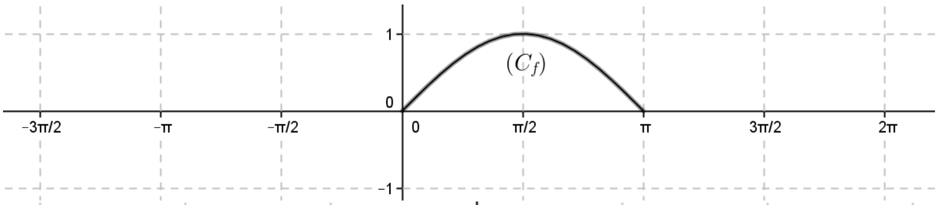
✍ Application ⑮:

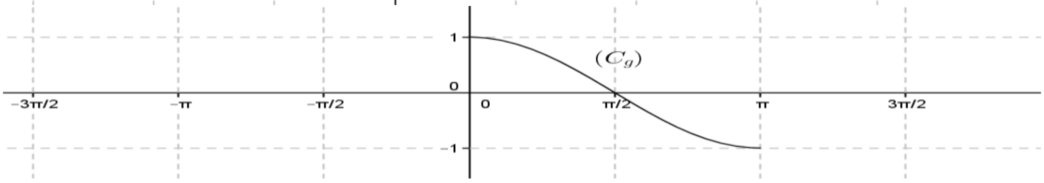
Considérons les fonctions f et g définies sur IR par $f(x)=\cos(x)$ et $g(x)=\sin(x)$.

1) Etudier la parité de f et de g.

2) Calculer $f(x+2\pi)$ et $g(x+2\pi)$ tel que $x \in IR$. Déduire.

3) Compléter les courbes de f et g représentées ci-dessous :





VI. Parabole – Hyperbole

1) La fonction $f: x \mapsto ax^2$ tel que : $a \in \mathbb{R}$:

✍ Activité ⑦:

Considérons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

1) Etudier la parité de f. Qu'est-ce que vous-déduisez ?

2) Calculer le taux de variation de f entre deux réels distincts a et b.

3) **a)**-Etudier la monotonie de f sur $[0,+\infty[$.

b)-En déduire la monotonie de f sur $]-\infty,0]$.

c)-Dresser le tableau de variations de f.

4) Remplir le tableau suivant :

x	0	1	2	$\frac{1}{2}$
$f(x)$				

5) Construire (C_f).

6) Refaire les mêmes questions précédentes pour la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-x^2$

✒ Définition:

Soit a un réel non nul.

La courbe de la fonction $f: x \mapsto ax^2$ dans repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan est appelée ***parabole de***

sommet O et ***d'axe de symétrie*** l'axe des ordonnées.

Propriété:

Soit a un réel non nul.

Le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto ax^2$ est :

• $Si\ a > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

• $Si\ a > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Application ①⑥:

Considérons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{3}x^2$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

1) Donner la nature de (C_f) en précisant ses éléments caractéristiques.

2) Dresser le tableau de variations de f puis construire (C_f).

2) La fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ où a, b et c des réels et $a \neq 0$:

Définition:

Soient a, b et c des réels tels que: $a \neq 0$.

La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ dans un repère orthonormé est une parabole de sommet $\Omega(-\dfrac{b}{2a}, f(-\dfrac{b}{2a}))$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Application ①⑦:

Donner le sommet et l'axe de symétrie pour chacune des courbes représentatives des fonctions définies par :

• $f_1 : x \mapsto x^2 + 2x + 1$ • $f_2 : x \mapsto -2x^2 + 4x + 1$ • $f_3 : x \mapsto x^2 + 1$

Propriété:

Soient a, b et c des réels tels que: $a \neq 0$.

Le tableau de variations de la fonction $(a \neq 0)$ $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est :

• $Si\ a > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(-\dfrac{b}{2a})$	$\nearrow$	

• $Si\ a > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-\dfrac{b}{2a})$	$\searrow$	

Application ①⑧:

Dresser le tableau de variations de fonctions définies par :

• $f_1 : x \mapsto x^2 + 2x + 1$ • $f_2 : x \mapsto -2x^2 + 4x + 1$ • $f_3 : x \mapsto x^2 + 1$

✍ Application ①⑨:

Considérons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

1) Déterminer la nature de (C_f) en précisant ses éléments caractéristiques.

2) Dresser le tableau de variations de f.

3) Construire (C_f).

4) Construire dans le même repère la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2$.

Remarque :

La courbe représentative de la fonction $(a \neq 0)$ $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ peut être construite à partir la courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2$ en utilisant la ***translation*** de vecteur $\vec{u}(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$.

1) La fonction $f : x \mapsto \frac{a}{x}$ tel que : $a \in \mathbb{R}^*$:

Considérons f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{a}{x}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

Parité de f :

- ✓ Pour tout $x \neq 0$ on a $, -x \neq 0$ donc $-x \in IR^*$.
- ✓ On a $f(-x) = \frac{a}{-x} = -\frac{a}{x} = -f(x)$.

On déduit que f est impaire et par conséquent (C_f) est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Monotonie de f :

Soient x_1 et x_2 deux éléments distincts de $\mathbb{R}^*$.

Le taux de variations de f entre x_1 et x_2 est : $T = \frac{-a}{x_1x_2}$.

- Si $x_1 \in]0;+\infty[$ et $x_2 \in]0;+\infty[$, alors : $x_1x_2 > 0$.
- Si $x_1 \in]-\infty;0[$ et $x_2 \in]-\infty;0[$, alors : $x_1x_2 > 0$.

Ce qui entraine que le signe de T est le signe de $-a$.

- Si : $a \prec 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

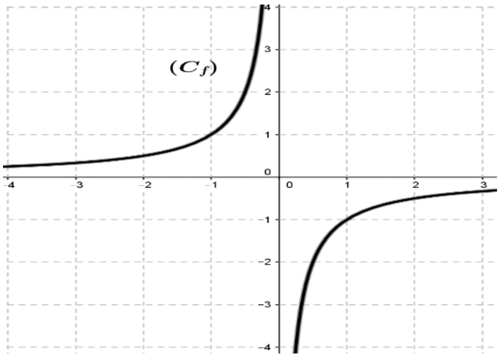
- Si : $a \succ 0$

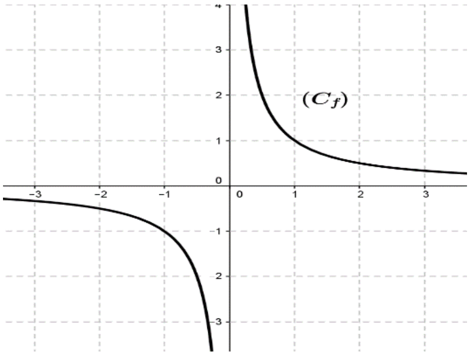
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

Courbe représentative de f :

La courbe représentative de f appelée ***hyperbole*** de ***centre*** O (Origine de repère) et d'***asymptotes*** $x=0$ et $y=0$ (Axes de repère).

- Si : $a \prec 0$
- Si : $a \succ 0$





✍ *Application ②⓪:*

Considérons f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=\dfrac{-2}{x}$.

1) Déterminer la nature de (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé.

2) Remplir le tableau suivant :

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$f(x)$						
$g(x)$						

3) Construire (C_f) et (C_g) .

2) La fonction homographique $(c \neq 0 \text{ et } ad-bc \neq 0)$ $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$:

Définition:

On appelle fonction ***homographique*** toute fonction f qui peut s'écrire sous la forme $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ où $a, b, c \neq 0$ *et* d sont des réels tels que : $ad-bc \neq 0$.

Remarque :

Si $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$ alors le quotient $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ est constant, En effet :

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{c(ax+b)}{c(cx+d)}=\frac{acx+bc}{c(cx+d)}=\frac{acx+ad}{c(cx+d)}=\frac{a(cx+d)}{c(cx+d)}=\frac{a}{c}$$

Exemple:

Considérons f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$.

On a $a=2$, $c=1$,$b=1$ et $d=-3$ et $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-7 \neq 0$ donc f est homographique.

Propriété:

Toute fonction homographique peut se mettre sous ***la forme réduite*** $x \mapsto A + \dfrac{B}{x-\alpha}$.

Exemple:

Cherchons la forme réduite de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$.

Pour tout x différent à 3, on a : $f(x) = \dfrac{2(x-3)+7}{x-3} = 2 + \dfrac{7}{x-3}$.

Donc $A = 2$, $B = 7$ *et* $\alpha = 3$.

Application ②①:

Donner la forme réduite des fonctions homographiques suivantes :

- $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$ • $g(x) = \dfrac{3x-1}{2x+3}$ • $h(x) = \dfrac{2x-11}{3x+6}$

Propriété:

Le tableau de variations de la fonction $x \mapsto A + \dfrac{B}{x-\alpha}$ est :

• ***Si :*** $B > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

• ***Si :*** $B < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

Démonstration :

Soient x_1 et x_2 deux éléments distincts de $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$.

Le taux de variations de f entre x_1 et x_2 est : $T = \dfrac{-B}{(x_1-\alpha)(x_2-\alpha)}$.

- Si $x_1 \in]\alpha;+\infty[$ et $x_2 \in]\alpha;+\infty[$, alors : $(x_1-\alpha)(x_2-\alpha) > 0$.
- Si $x_1 \in]-\infty;\alpha[$ et $x_2 \in]-\infty;\alpha[$, alors : $(x_1-\alpha)(x_2-\alpha) > 0$.

Ce qui entraine que le signe de T est le signe de $-B$.

Application ②②:

Donner le tableau de variations des fonctions homographiques suivantes :

- $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$ • $g(x) = \dfrac{3x-1}{2x+3}$ • $h(x) = \dfrac{2x-11}{3x+6}$

Propriété:

La courbe représentative de $x \mapsto A + \dfrac{B}{x-\alpha}$ est une ***hyperbole*** de ***centre*** $\Omega(\alpha; A)$ et d'***asymptotes*** $x = \alpha$ et $y = A$.

Application ②③:

Considérons f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ et (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Déterminer la nature de (C_f) .

3) Construire (C_f) .

4) Construire dans le même repère la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{3}{x}$.

❍ *Remarque :*

La courbe représentative de la fonction $x\mapsto A+\frac{B}{x-\alpha}$ peut être construite à partir la courbe représentative de la fonction $x\mapsto \frac{B}{x}$ en utilisant la translation de vecteur $\vec{u}(\alpha;A)$.

✍ *Exercice de synthèse: Exercice ①② de la série*

Soient f et g deux fonctions numériques définies par : $f(x)=-2x^2+4x$ et $g(x)=\frac{x}{x-1}$.

1) Déterminer la nature de (C_f) la courbe de f .

2) Donner le tableau de variations de f .

3) a)-Construire (C_f).

b)- Resoudre graphiquement dans D_f : $f(x)=3$, $f(x)\geq 3$ **et** $f(x)\prec 3$.

4) Déterminer la nature de (C_g) la courbe de g .

5) Donner le tableau de variations de g .

6) a)-Construire (C_g) dans un le meme repère.

b)- Resoudre graphiquement dans D_g : $\frac{x}{x-1}=-2x^2+4x$, $\frac{x}{x-1}\leq -2x^2+4x$.