I. SIMPLIFICATION D'ECRITURE FRACTIONNAIRE.

Propriété :
Le quotient de deux nombres ne change pas si l'on multiplie ou on divise le numérateur ET le dénominateur par un même nombre.

Soit a, b, c, trois nombres tels que $b \neq 0$, $c \neq 0$: $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \dfrac{\mathbf{a \times c}}{\mathbf{b \times c}}$ et $\dfrac{\mathbf{a \times c}}{\mathbf{b \times c}} = \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$

Exemples :

$$\frac{63}{56} = \frac{\boxed{7} \times 9}{\boxed{7} \times 8} = \frac{9}{8}$$

$$\frac{-2,7}{4,5} = \frac{-2,7 \times \boxed{10}}{4,5 \times \boxed{10}} = \frac{-27}{45} = \frac{-\boxed{9} \times 3}{\boxed{9} \times 5} = \frac{-3}{5}$$

II. ADDITION ET SOUSTRACTION.

a. **Si les dénominateurs sont identiques, on n'ajoute que les numérateurs :**

$$A = \frac{2}{5} + \frac{7}{5}$$
$$A = \frac{2+7}{5}$$
$$A = \frac{9}{5}$$

$$B = \frac{-9}{4} - \frac{3}{4}$$
$$B = \frac{-9-3}{4}$$
$$B = \frac{-12}{4}$$
$$B = -3$$

b. **Si un dénominateur est un multiple de l'autre, on transforme l'une des deux fractions pour obtenir le même dénominateur :**

$$C = \frac{5}{2} - \frac{7}{8}$$
$$C = \frac{5 \times 4}{2 \times 4} - \frac{7}{8}$$
$$C = \frac{20}{8} - \frac{7}{8}$$
$$C = \frac{20-7}{8}$$
$$C = \frac{13}{8}$$

$$D = \frac{5}{2} - \frac{-2}{6}$$
$$D = \frac{5 \times 3}{2 \times 3} - \frac{-2}{6}$$
$$D = \frac{15}{6} - \frac{-2}{6}$$
$$D = \frac{15-(-2)}{6}$$
$$D = \frac{15+2}{6}$$
$$D = \frac{17}{6}$$

c. **Dans tous les autres cas, on transforme les deux fractions pour obtenir le même dénominateur (on cherche un dénominateur commun, le plus petit possible) :**

$$D = \frac{5}{4} + \frac{2}{3}$$

→ multiples de 4 : 4 ; 8 ; **12** ; 16
→ multiples de 3 : 3 ; 6 ; 9 ; **12** ; 15 → 12 est le plus petit multiple commun de 4 et 3.

$$D=\frac{5\times 3}{4\times 3}+\frac{2\times 4}{3\times 4}$$

$$D=\frac{15}{12}+\frac{8}{12}$$

$$D=\frac{15+8}{12}$$

$$D=\frac{23}{12}$$

<u>Exemple très détaillé</u> : Calculer $\frac{-7}{9}+\frac{5}{6}$

1) On cherche un multiple commun aux dénominateurs 9 et 6 si possible plus petit que $9\times 6=54$**.**

→ Les premiers multiples de 9 non nuls sont : 9, **18**, 27 ...

→ Les premiers multiples de 6 non nuls sont : 6, 12, **18**, 24 ...

➔ On constate que **18** est un multiple commun à 9 et à 6.

2) On cherche le nombre égal à $\frac{-7}{9}$ et le nombre égal à $\frac{5}{6}$ qui ont pour dénominateur 18 :

→ $\frac{-7}{9}=\frac{-7\times 2}{9\times 2}=\frac{-14}{18}$ et $\frac{5}{6}=\frac{5\times 3}{6\times 3}=\frac{15}{18}$

3) On calcule :

$$\frac{-7}{9}+\frac{5}{6}=\frac{-7\times 2}{9\times 2}+\frac{5\times 3}{6\times 3}=\frac{-14}{18}+\frac{15}{18}=\frac{1}{18}$$

III. Multiplication.

<u>Propriété</u> :

Lors de la multiplication de deux écritures fractionnaires, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, en appliquant la gestion des signes.

Soit a, b, c, d quatre nombres tels que $b\neq 0$, $d\neq 0$: $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\times\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{c}}{\mathbf{b}\times\mathbf{d}}$

Exemple : $E=\frac{-3}{5}\times\frac{7}{-2}=+\frac{3\times 7}{5\times 2}=\frac{21}{10}$

<u>Exemple très détaillé</u> : Calculer $\frac{-14}{9}\times\frac{6}{-5}\times\frac{-3}{7}$

1) On détermine <u>d'abord le signe du résultat</u>.

→ Ici, trois facteurs sont négatifs, donc le produit est négatif.

→ $\frac{-14}{9}\times\frac{6}{-5}\times\frac{-3}{7}=-\frac{14}{9}\times\frac{6}{5}\times\frac{3}{7}$

2) On <u>multiplie les numérateurs entre eux et dénominateurs entre eux</u> sans effectuer les calculs

→ $\frac{-14}{9}\times\frac{6}{-5}\times\frac{-3}{7}=-\frac{14}{9}\times\frac{6}{5}\times\frac{3}{7}=-\frac{14\times 6\times 3}{9\times 5\times 7}$

3) On <u>simplifie</u> <u>en priorité</u> (si possible) le numérateur avec le dénominateur avant de calculer le résultat :

$$\frac{-14}{9}\times\frac{6}{-5}\times\frac{-3}{7}=-\frac{14}{9}\times\frac{6}{5}\times\frac{3}{7}=-\frac{14\times 6\times 3}{9\times 5\times 7}=-\frac{\boxed{7}\times 2\times\boxed{3}\times 2\times\boxed{3}}{\boxed{3}\times\boxed{3}\times 5\times\boxed{7}}=-\frac{2\times 2}{5}=-\frac{4}{5}$$

Propriété :
Les règles de priorité des calculs sont les mêmes que celles déjà vues : d'abord les parenthèses (les plus intérieures, puis multiplication et division, puis addition et soustraction.

Remarque :
On essaiera de simplifier numérateur et dénominateur **au plus tôt** chaque fois que cela sera possible.

$$Ex: \frac{-5}{3}-\underset{-}{\frac{3}{-8}}\times\underset{+}{\frac{-2}{-9}}=\frac{-5}{3}-\left(-\frac{3\times2}{8\times9}\right)=\frac{-5}{3}+\frac{\boxed{3}\times\boxed{2}}{4\times\boxed{2}\times\boxed{3}\times3}=\frac{-5}{3}+\frac{1}{12}=\frac{-5\times4}{3\times4}+\frac{1}{12}=\frac{-20}{12}+\frac{1}{12}=\frac{-19}{12}$$

IV. Inverse

Propriété :
Deux nombres sont inverses si leur produit est égal à 1.

Exemple : $2\times0,5=1$ $\qquad -4\times\left(-\frac{1}{4}\right)=1$ $\qquad \frac{3}{8}\times\frac{8}{3}=1$

Définition :
L'inverse d'un nombre quelconque x non nul ($x\neq0$) est le **quotient de 1 par x.**

→ on le note $\frac{1}{x}$ ou x^{-1}

Exemple : L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$, l'inverse de 5 est $\frac{1}{5}$

L'inverse d'une fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction $\frac{b}{a}$.

→ En effet : $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=\frac{a\times b}{b\times a}=\frac{ab}{ab}=1$.

Exemples :

L'inverse de $\frac{-2}{5}$ est $\frac{5}{-2}$, l'inverse de $\frac{1}{2}$ est $\frac{2}{1}$ (c'est à dire 2)

V. Division

Propriété :
Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

Soit a et b deux nombres non nuls : $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b},\ avec\ b\neq0$

Exemples : $\frac{3}{7}=3\times\frac{1}{7}$ $\qquad \frac{-2}{0,25}=-2\times\frac{1}{0,25}=-2\times4=-8$

Soit a, b, c, d quatre nombres non nuls : $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\div\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}=\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\times\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{c}}$

Exemple : $\frac{5}{8}:\frac{3}{7}=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}}=\frac{5}{8}\times\frac{7}{3}=\frac{5\times7}{8\times3}=\frac{35}{24}$

En particulier :

On a : $x\times\frac{1}{x}=1$ → $9\times\frac{1}{9}=1$

Application :

$$F=\frac{\frac{7}{-5}}{\frac{-4}{3}}\quad\left(=\frac{7}{-5}:\frac{-4}{3}\right)$$

$$F=\underset{-}{\frac{7}{-5}}\times\underset{-}{\frac{3}{-4}}$$

$$F=+\frac{7\times3}{5\times4}$$

$$F=\frac{21}{20}$$

***__Exemple très détaillé__* :** Calculer $\dfrac{\left(\frac{-4}{5}\right)}{\left(\frac{2}{15}\right)}$ $\left(\textit{que l'on peut aussi écrire}:\left(\frac{-4}{5}\right)\div\left(\frac{2}{15}\right)\right)$

1) On détermine l'inverse du dénominateur en «permutant» le numérateur et le dénominateur :

→ Ici l'inverse de $\frac{2}{15}$ est $\frac{15}{2}$.

2) On multiplie la dernière fraction obtenue avec la fraction qui est au numérateur :

$$\rightarrow \frac{\left(\frac{-4}{5}\right)}{\left(\frac{2}{15}\right)}=\underset{-}{\frac{-4}{5}}\times\underset{+}{\frac{15}{2}}=-\frac{4\times15}{5\times2}=-\frac{\boxed{2}\times2\times3\times\boxed{5}}{\boxed{5}\times\boxed{2}}=-2\times3=-6$$

Remarque : La barre de fraction principale doit être plus grand et à hauteur du signe « = » :

$$\mathrm{A}=\frac{\frac{3}{5}}{8}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{8}{1}}=\frac{3}{5}\times\frac{1}{8}=\frac{3\times1}{5\times8}=\frac{3}{40}\quad\text{et}\quad\mathrm{B}=\frac{2}{\frac{5}{8}}=\frac{\frac{2}{1}}{\frac{5}{8}}=\frac{2}{1}\times\frac{8}{5}=\frac{2\times8}{1\times5}=\frac{16}{5}$$

Calcul général :

$$C=\frac{\frac{5}{3}-\frac{9}{4}}{\frac{18}{5}\times\frac{10}{9}}=\frac{\frac{5\times4}{3\times4}-\frac{9\times3}{4\times3}}{\frac{18\times10}{5\times9}}=\frac{\frac{20}{12}-\frac{27}{12}}{\frac{9\times2\times5\times2}{5\times9}}=\frac{\frac{20-27}{12}}{\frac{4}{1}}=\frac{\frac{-7}{12}}{\frac{4}{1}}=\frac{-7}{12}\times\frac{1}{4}=-\frac{7\times1}{12\times4}=-\frac{7}{48}$$