Limite d'une fonction numérique

I. Limite infinie et limite infinie d'une fonction au voisinage de $\pm\infty$

1. Limite infinie d'une fonction au voisinage de $\pm\infty$

☞**Activité**

1)

a. Compléter le tableau suivant

x	10	10^4	10^{12}	10^{25}	-10^4	-10^{12}	-10^{25}
x^2							
x^3							

b. Que remarquez-vous pour x^2 et x^3 quand x prend des valeurs positives plus en plus grandes ?

c. Que remarquez-vous pour x^2 et x^3 quand x prend des valeurs négatives plus en plus petites ?

2)

a. Compléter le tableau suivant

x	10	10^4	10^{12}	10^{36}
$\sqrt{x}$				

b. Que remarquez-vous pour $\sqrt{x}$ quand x prend des valeurs positives plus en plus grandes

Définition ①

Soit f une fonction numérique définie dans un voisinage de $+\infty$.

* Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ alors on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$ et se lit la limite de la fonction f si x tend vers $+\infty$ est $+\infty$.
* Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ alors on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f=-\infty$ et se lit la limite de la fonction f si x tend vers $+\infty$ est $-\infty$.

Définition ②

Soit f une fonction numérique définie dans un voisinage de $-\infty$.

* Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ alors on écrit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f=+\infty$ et se lit la limite de la fonction f si x tend vers $-\infty$ est $+\infty$.
* Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ alors on écrit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f=-\infty$ et se lit la limite de la fonction f si x tend vers $-\infty$ est $-\infty$.

Propriété

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $k\in\mathbb{R}$ on a

$\otimes \lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ $\otimes \lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n}=+\infty$ $\otimes \lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n+1}=-\infty$ $\otimes \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

$\otimes \lim\limits_{x\to+\infty} k.x^n=\begin{cases}+\infty & ;si\quad k>0\\ -\infty & ;si\quad k<0\end{cases}$; $\otimes \lim\limits_{x\to-\infty} k.x^{2n}=\begin{cases}+\infty & ;si\quad k>0\\ -\infty & ;si\quad k<0\end{cases}$; $\otimes \lim\limits_{x\to-\infty} k.x^{2n+1}=\begin{cases}+\infty & ;si\quad k<0\\ -\infty & ;si\quad k>0\end{cases}$

Exemples :

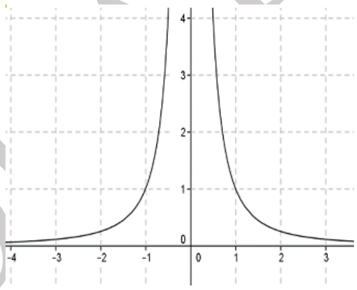
$\otimes \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; $\otimes \lim_{x\to+\infty} x^{15} = +\infty$ $\otimes \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ (car 2 est pair) $\otimes \lim_{x\to-\infty} x^{35} = -\infty$ (35 est impair)

$\otimes \lim_{x\to\pm\infty} 2x^2 = +\infty$; $\otimes \lim_{x\to\pm\infty} -2x^4 = +\infty$; $\otimes \lim_{x\to-\infty} 3x^{15} = -\infty$; $\otimes \lim_{x\to-\infty} -2x^{35} = +\infty$

2. Limite finie d'une fonction au voisinage de $\pm\infty$

☞Activité

La figure ci-dessous présente la représentation graphique de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ dans un repère orthonormé.



1) Que remarquez-vous pour les valeurs de $f(x)$ si x tend vers $+\infty$
2) Que remarquez-vous pour les valeurs de $f(x)$ si x tend vers $-\infty$
3) Peut-on conclure $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3}$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^4}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4}$

Propriété :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \mathbb{R}$ on a

$\otimes \lim_{x\to+\infty} \frac{k}{x^n} = 0$; $\otimes \lim_{x\to-\infty} \frac{k}{x^n} = 0$; $\otimes \lim_{x\to+\infty} \frac{k}{\sqrt{x}} = 0$

Propriété

Soit f une fonction numérique et soit $l \in \mathbb{R}$ on a :

$\otimes \lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - l\right) = 0$; $\otimes \lim_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - l\right) = 0$

Application ①

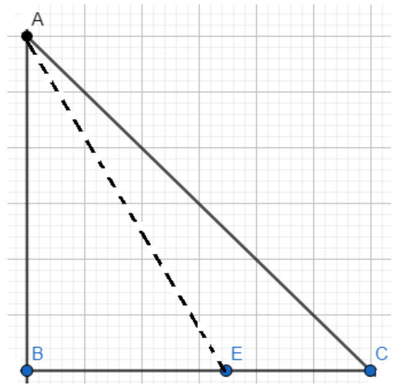
1) Montrer que $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3 + x}{x^3} = 2$
2) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+5}{4x^2} = \frac{1}{2}$

II. Limite finie et limite infinie d'une fonction en un point

1. Limite finie d'une fonction en un point

☞Activité

Soit ABC un triangle de surface $18cm^2$ et soit $E(x)$ un point se déplace sur le segment $[BC]$.



On désigne par $f(x)$ la surface du triangle ABE

1) Que remarquez-vous si x approche plus en plus de 6.
2) Que remarquez-vous si x approche plus en plus de 0.

Définition

Soient a et l deux nombres réels

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert de forme $]a-\alpha;a+\alpha[$ sachant que $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ ou définie sur un ensemble de forme $]a-\alpha;a+\alpha[\setminus\{a\}$.

Si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a alors on écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$

Propriété

Soit f une fonction numérique et Soient a et l deux nombres réels.

Si f admet une limite l en a alors cette limite ***est unique***.

Remarque

Pour calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; on remplace x par a :

- ✱ Si $f(a)\in\mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.
- ✱ Si $f(a)=\frac{"0"}{0}$, il faut chercher des méthodes (factorisation par $(x-a)$; multiplier par le conjugué……) pour éliminer $\frac{"0"}{0}$.
- ✱ Les formes indéterminées : $\frac{"0"}{0}$; $\frac{"\infty"}{\infty}$; $"0\times\infty"$; $"+\infty-\infty"$

Application ②

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to-2}\sqrt{x^2+4} \quad ; \quad \lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \quad ; \quad \lim_{x\to-1}\frac{x^2-2x-3}{x+1} \quad ; \quad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+2x-3} \quad ; \quad \lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{3-\sqrt{x+4}}$$

2. Limite infinie d'une fonction en un point

Définition

Soit f une fonction numérique et a un nombre réel.

- ✱ Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a alors on écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{a} f=+\infty$.
- ✱ Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a alors on écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{a} f=-\infty$.

☞ ***Limite à gauche et limite à droite d'une fonction en un point***

Définition

Soit f une fonction numérique et a un nombre réel.

- ✱ Si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a à droite alors on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=l$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$.

* Si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a à gauche alors on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=l$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$.

Remarque

On peut définir d'une manière analogue $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\pm\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\pm\infty$

☞**Limites usuelles**

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ on a

$\otimes \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$; $\otimes \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$; $\otimes \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$; $\otimes \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$

- Si n est pair alors $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=+\infty$
- Si n est impair alors $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=-\infty$

Application③

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-2x+3}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-3}{2-x}$; $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^3+1}{x^2+x}$; $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2+x-1}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1-x}{4-2x}$.

Propriété :

Soit f une fonction numérique et a un nombre réel

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$

Application④

1) Soit f une fonction numérique définie par $\begin{cases} f(x)=-x+2;\ x\geq 4\\ f(x)=x^2-2x-10;\ x<4\end{cases}$

Calculer $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$. Conclure

2) Soit g une fonction numérique définie par $\begin{cases} g(x)=1-2ax;\ x\geq 2\\ g(x)=\frac{x^2-3x+1}{-x+3};\ x<2\end{cases}$

Déterminer le nombre réel a pour que f admet une limite en 2

III. Opérations sur les limites

Dans cette paragraphe l et l' désignent des nombres réels et a désigne un réel ou $\pm\infty$

1. Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(f(x)+g(x)\right)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$	$-\infty$

2. Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(f(x)\times g(x)\right)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$	$F.I$

3. Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$	$F.I$	$F.I$	$F.I$

Application ⑤

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} x^2+\frac{1}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} x^3-x \quad ; \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+4}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^4+x+1}{2x^2-5} \quad ; \quad \lim_{x\to\frac{3}{2}^+}\frac{x+2}{2x-3} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x(x+1)+1}{x+1}$$

IV. Limite d'une fonction polynôme – Limite d'une fonction rationnelle Limite d'une fonction de forme $\sqrt{f}$

1. Limite d'une fonction polynôme

Propriété

Soit f une fonction polynôme et a un nombre réel.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
- La limite d'une fonction polynôme au voisinage de ∞ c'est la limite du terme le plus dominant (plus haut degré).

Exemples

⊗ $\lim\limits_{x\to 3} 4x^2+2x-5 = 4\times 3^2+2\times 3-5 = 37$.

⊗ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt{2}\right)x^3+2x^2-1 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt{2}\right)x^3 = -\infty$

⊗ $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2+3x-4 = \lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2 = +\infty$.

Application ⑥

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} -5x^7+4x^2-9 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \left(-\sqrt{3}+2\right)x^4+2x-1 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{2}-3}x^5+2x+1$$

2. Limite d'une fonction rationnelle

Propriété

Soit f une fonction rationnelle et a un nombre réel.

- Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\dfrac{P(a)}{Q(a)}$
- La limite d'une fonction rationnelle au voisinage de ∞ c'est la limite du quotient de termes les plus dominant (plus haut degré au numérateur et plus haut degré au dénominateur).

Application ⑦

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4+2x^2}{3x^3+5x^2+1} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{3}x^2-4x+1}{2x^2-1} \quad ; \quad \lim_{x\to3} \frac{-2x^2+3x-5}{2x+4}$$

3. Limite d'une fonction de la forme $\sqrt{f}$

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de forme $[a;+\infty[$ $(a\in\mathbb{R})$ telle que $\forall x\in[a;+\infty[;\ f(x)\geq 0$

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=+\infty$

Remarque :

La propriété précédente est reste valable pour x tend vers $-\infty$ ou a ou a^+ ou a^-

Application ⑧

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to1}\sqrt{x^2+3x+5} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^3+3x^2+7} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{-3x^3+2x-1}$$

V. Limites et ordre

Propriétés

Soient f,g et h définies sur un intervalle de forme $]a-\alpha;a+\alpha[$ ou $\alpha\in\mathbb{R}^*$ et soit $l\in\mathbb{R}$

- Si $\begin{cases}(\forall x\in I);\ f(x)\leq g(x)\\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty\end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.
- Si $\begin{cases}(\forall x\in I);\ g(x)\leq f(x)\\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty\end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$

- Si $\begin{cases} (\forall x \in I); g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$
- Si $\begin{cases} (\forall x \in I); |f(x) - l| \leq g(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

Remarque

Les propriétés sont valables pour x tend vers $\pm\infty$ ou x tend vers à droite ou à gauche de a

Exemple : Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + \cos(x)$

On a $-1 \leq \cos(x) \leq 1 \Rightarrow -1 + x^2 \leq x^2 + \cos(x) \leq 1 + x^2$

Or on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 1 = \lim\limits_{x \to \infty} x^2 - 1 = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + \cos(x) = +\infty$

Application ⑨

1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{2 - \sin(x)} \leq 1$

2) Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2 - \sin(x)}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{2 - \sin(x)}$.

VI. Limites trigonométriques

Propriété ①

Soit $a \in \mathbb{R}$ on a

$\otimes \lim\limits_{x \to a} \cos(x) = \cos(a)$; $\otimes \lim\limits_{x \to a} \sin(x) = \sin(a)$; $\otimes \lim\limits_{x \to a} \tan(x) = \tan(a) / \left(a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right)$

Exemple

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \lim_{x \to \pi} \tan(x) = \tan(\pi) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to \frac{-\pi}{6}} \sin(x) = \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \frac{-1}{2}$$

Remarque

Les fonction $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \tan(x)$ n'admettent pas de limite au voisinage de $\pm\infty$

Propriété ②

$$\bullet \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad ; \quad \bullet \lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \quad ; \quad \bullet \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = 1 \quad \text{ou} \quad \bullet \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Démonstration

a. Montrer que $\bullet \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$

On a $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right);\sin(x)\le x\le\tan(x)$

Donc $\frac{1}{\tan(x)}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{\sin(x)}$

Alors $\frac{\cos(x}{\sin(x)}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{\sin(x)}$

Or $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right);\sin(x)\ge 0$

D'où $\cos(x)\le\frac{\sin(x)}{x}\le 1$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)=\lim\limits_{x\to 0}1=1$ alors

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$

b. Montrer que $\bullet \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$

On a $\left(\forall x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right)$; $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Donc $\frac{\tan(x)}{x}=\frac{\sin(x)}{x.\cos(x)}=\frac{\sin(x)}{x}\times\frac{1}{\cos(x)}$

Puisque

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\times\frac{1}{\cos(x)}=1\times 1=1$

Alors $\bullet \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$

c. Montrer que $\bullet \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\frac{x^2}{2}}=1$

On a $\bullet \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{2}}$

On pose $X=\frac{x}{2}$ donc si $x\to 0$ alors $X\to 0$

Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{2\sin^2(X)}{2X^2}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{\sin^2(X)}{X^2}=\lim\limits_{X\to 0}\left(\frac{\sin(X)}{X}\right)^2=1$

D'où $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\frac{x^2}{2}}=1$

__Résultats__ :

Soit $a\in\mathbb{R}^*$ on a

$\oplus\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1$; $\oplus\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{ax}=1$; $\oplus\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}=\frac{1}{2}$; $\oplus\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{\left(\frac{ax}{2}\right)^2}=1$

__Application ①⓪__

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{4x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(4x)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{\sin(x)}$