« Nombres Complexes »

Exercice 1 :

I/ Ecrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$\left(\sqrt{3}-i\right)\left(1-i\right)^4$; $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}-\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}$

$\dfrac{2}{i}(3i-1)+(1+i)^3$; $\dfrac{2-4i}{2i+1}$

II/ Ecrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

$\dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)^4\left(1+i\right)^2}{-2i\left(1-i\sqrt{3}\right)^2}$; $3\left(1+i\sqrt{3}\right)^2\left(-2-2i\right)^5$

III/ Soient les nombres complexes $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = 1+i\sqrt{3}$. On pose : $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$

a- Ecrire Z sous forme algébrique.

b- Ecrire Z sous forme trigonométrique.

c- En déduire les valeurs exacte de :

$\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ puis calculer Z^{12} .

IV/ Résoudre dans C les équations suivantes :

- $(1-i)\bar{z} = 2+3i$
- $2iz + (1-2i)\bar{z} = 1-4i$
- $z^2 - 4z + 8 = 0$

Exercice 2 : Soit $z = -1 - i$; $z' = -1 + i\sqrt{3}$; $Z = \dfrac{z}{z'}$

1°/ Ecrire chacun des nombres complexes z, z' et Z sous forme trigonométrique.

2°/ En déduire $\cos\dfrac{7\pi}{12}$, $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

1°) On considère le nombre complexe $a = -4\sqrt{3} - 4i$

Déterminer le module et un argument de a .

2°) Résoudre dans C l'équation $z^2 = -4\sqrt{3} - 4i$

(on donnera les solutions sous forme trigonométrique) .

3°) Soit $u = (-1-i) + \sqrt{3}(1-i)$.

a- Calculer u^2 .

b- En déduire le module et un argument de u .

c- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O , \vec{e_1} , \vec{e_2}\right)$ on considère les points A, B, C d'affixes respectives u ; $\sqrt{3}(1-i)$ et $(-1-i)$

Montrer que OBAC est un rectangle .

Exercice 3 :

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A(-2i) ;

B(4-2i) ; C(4+2i) et D(1).

❶ a- Ecrire $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ sous forme algébrique.

b- En déduire la nature du triangle ABC.

❷ A tout point M ≠ A d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z-4-2i}{z+2i}$

a- Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'| = 1$.

b- Déterminer l'ensemble des points M tel que z' soit réel.

c- Montrer que pour tout z ≠ -2i, $z' - 1 = \dfrac{-4-4i}{z+2i}$

d- Montrer que : DM'.AM = $4\sqrt{2}$.

e- En déduire que si M appartient à un cercle ζ(A,2) alors M' appartient à un cercle ζ 'que l'on précisera.

Exercice 4:

1°) a- Résoudre dans l'ensemble C l'équations :

$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$.

b- Ecrire les solutions trouvées sous la forme exponentielle.

c- Résoudre dans l'ensemble C l'équations :

$z^4 - \sqrt{3}\, z^2 + 1 = 0$.

2°) Soit θ un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a- On considère dans C l'équation :

$(E): z^2 - 2\sin\theta\, z + 1 = 0$. Vérifier que

$e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ et $e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ sont les solutions de (E).

b- Résoudre dans l'ensemble C

l'équations $z^4 - 2\sin\theta\, z^2 + 1 = 0$.

Exercice 5

On pose $z_1 = i + 1$; $z_2 = 2i + 2\sqrt{3}$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$

1/ Mettre sous formes trigonométrique puis exponentielle les complexes z_1 et z_2

2/ Ecrire sous formes trigonométrique et algébrique le complexe Z

3/ En déduire les valeurs exactes de

$\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$

4/a- Déterminer la forme exponentielle de Z^6

b- Déduire la forme algébrique de Z^6

Exercice 6

Soit le nombre complexe $z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

1)a/ Calculer z^2 puis déterminer sa forme trigonométrique

b/ En déduire la forme trigonométrique de z

2) Donner les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$

a/ Construire le point A, B et C d'affixes respectives z, z^2, iz^2

b/ Placer le point D symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnés et écrire z_D sous forme trigonométrique

Exercice 7 :

Soit m un nombre complexe de module 2 et a et $b \in$ C tel que :

$a = 1 + i + m$ et $b = 1 - i + m$.

1°) Déterminer m pour que a et b soient conjugués.

2°) Déterminer m pour que a et b soient de même module.

3°) Déterminer m pour que $a + ib = 0$.

Exercice 8:

Linéariser : $\cos^3 x \sin 2x$, $\cos^2 2x \sin 3x$, $\cos^4 x \sin x$

Exercice 9 **(session normal 2018)**

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 + 2z + 5 = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

a) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) On considère le point A d'affixe $a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ et le point B image de A par la rotation R.

Soit b l'affixe du point B, montrer que $b = d.a$

3) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et C l'image de B par la translation t et c l'affixe de C

c) Vérifier que $c = b + a$ et en déduire que $c = a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ (on pourra utiliser la question 2)b)

d) Déterminer $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ puis en déduire que la triangle OAC est équilatéral

Exercice 10 : démontrer pour tous x et y de $\mathbb{R}$ on a

$$e^{ix}+e^{iy}=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)e^{i\frac{x+y}{2}}$$ **et**

$$e^{ix}-e^{iy}=2i\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)e^{i\frac{x+y}{2}}$$

Puis déduire une factorisation à $\cos x+\cos y$ et $\sin x+\sin y$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ direct d'unité graphique 1 cm. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 3 + 4i$. Soit C et D les points d'affixes respectives $z_C=2\sqrt{3}+i\left(-2-\sqrt{3}\right)$ et $z_D=-2\sqrt{3}+i\left(-2+\sqrt{3}\right)$.

1. a. Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D.

b. En déduire que les points B et D sont sur un cercle (C) de centre A dont on déterminera le rayon.

2. Soit F, l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.

a. Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2i$.

b. Montrer que le point F est le milieu du segment $[CD]$.

c. Montrer que $\frac{z_C-z_F}{z_A-z_F}=-i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\frac{z_C-z_F}{z_A-z_F}$. Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment $[CD]$.

Exercice 11

On considère le nombre complexe $z=x+iy$ tel que $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on pose $U=\left(\frac{z}{1-i}\right)^2$

1) Calculer U dans le cas ou $z=1+i$
2) Exprimer en fonction de x et y $\mathrm{Re}(U)$ et $\mathrm{Im}(U)$
3) Déterminer x et y pour que U soit un réel
4) Déterminer les valeurs de z pour que U=4

Exercice 12

On considère les deux nombres complexes

$$z=(2+3i)^{2010}+(2-3i)^{2010}-5^{1005}$$

$$z'=\frac{(4+3i)^3}{(5-8i)^7}-\frac{(4-3i)^3}{(5+8i)^7}-2020i$$

Démontrer que $z\in\mathbb{R}$ et $z'\in i\mathbb{R}$

Exercice 13

Démontrer que pour tous z de $\mathbb{C}^*$ on a

$$\overline{z+\frac{1}{z}-\frac{1+z}{\overline{z}}}=\overline{z}-1$$

Exercice 14

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante

$z^3-13z^2+25z-19=0\quad (E)$

Démontrer que si z_0 est une solution de (E) alors $\overline{z_0}$ est aussi est une solution de (E)

Exercice 15

On considère les nombres complexes suivants

$$A=\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)(1+i)$$

$$B=(1-i)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\left(\sqrt{3}-i\right)$$

$$C=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)}{1+i}$$

1) Ecrire A et B sous forme trigonométrique
2) Démontrer $C=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$
3) Démontrer que pour tous n de $\mathbb{N}$

$$C^n+\overline{C}^n=2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$