Professeur : RACHID FANIDI

L'année Scolaire :2020-2021

Lycée AL Massira EL Khadraa Tiznit

Nombres Complexes

- Série 06 -

2BAC SP-SVT BIOF

المديرية الإقليمية بتيزنيت
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
جهة سوس ماسة

EXERCICE 01

soit z un nombre complexe tel que:$z \neq i$.
On pose $z = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.
Soit le nombre complexe:

$$Z = \frac{z+2}{z-i}$$

1)Montrer que:

$$Re(Z) = \frac{x^2 + y^2 + 2x - y}{x^2 + (y-1)^2} \ et \ Im(Z) = \frac{x - 2y + 2}{x^2 + (y-1)^2}$$

2)Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que Z est réel.

3) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que Z est imaginaire pur.

4) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|Z| = 1$.

EXERCICE 02

Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points $M(z)$ du plant vérifiant:

1) $|z + 1 - 2i| = 3$
2) $|\bar{z} - 2 - i| = 1$
3) $|iz - 1 + i| = 2$
4) $|\bar{z} + 2 - 3i| = |z + i|$

EXERCICE 03

Le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
On considère les points A,B et C d'affixes respectives:
$a = 2i$,$b = \sqrt{3} + i$ et $c = \sqrt{3} + 3i$.

1) Écrire les deux nombres complexes b et c sous forme trigonométrique.

2) Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe

$$\frac{b-a}{c-a}$$

Puis en déduire la nature du triangle ABC.

3) Vérifier que: $b = c - a$ puis en déduire la nature du quadrilatère $OBCA$.

4) Montrer que c^{2007} est un réel négatif.

EXERCICE 04

Le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
On considère les points A,B et C d'affixes respectives:
$a = -\sqrt{2}$,$b = 1 + i$ et $c = 1 - i$.

1)a-Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe:

$$\frac{b-a}{c-a}$$

b-En déduire une mésure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}}\right)$.

2) Vérifier que (OA) est la médiatrice du segment $[BC]$
Et en déduire que:

$$\left(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$$

3) a-Écrire sous forme algébrique puis trigonométrique le nombre complexe:

$$\frac{a-b}{a}$$

b-En déduire les valeurs de $\cos\left({}^{\pi}/_{8}\right)$ et $\sin\left({}^{\pi}/_{8}\right)$.

EXERCICE 05

On considère les nombres complexes suivants:

$$a = 1 - i \ ; b = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} i$$

$$c = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2} i$$

1)a-Montrer que:

$$\frac{c}{a} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Puis Déterminer un argument du nombre ${}^{c}/_{a}$.

b-Déterminer un argument du nombre a puis déduire un argument du nombre c.

c- Vérifier que: $c = b - a$

2) Dans Le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
On considère les points $A(a)$,$B(b)$ et $C(c)$ avec
a-Montrer que le triangle ABC est isocéle en B.

c-Déterminer une mésure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}\right)$

d-Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que:
$|z - c| = |z - a|$.

EXERCICE 06

On considère dans le plan complexe les points A et B d'affixes respectives:

$a = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$ et $b = \sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)$

1) Montrer que: $a^2 = 4(\sqrt{3} + i)$ et que: $b = i\overline{a}$.

2) Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe $4(\sqrt{3} + i)$.

3) Déduire la forme trigonométrique des nombres complexes a et b.

4) Calculer $arg\left({}^{b}/_{a}\right)$ puis déduire la nature du triangle OAB.

EXERCICE 07

Le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Soit la translation t de vecteur $\vec{u}\left(2 - \sqrt{2} + i(2 - \sqrt{6})\right)$

Et on considère le point A d'affixe $a = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$.

1) Donner l'écriture complexe de la translation t.

2) Déterminer b l'affixe du point B image du point A par la translation t.

3) on pose $c = {}^{a}/_{b}$.

Écrire les nombres a; b et c sous la forme trigonométrique

4) Écrire sous la forme algébrique le nombre c.

5) En déduire les valeurs de: $\cos\left({}^{\pi}/_{12}\right)$ et $\sin\left({}^{\pi}/_{12}\right)$.

6) Écrire sous la forme algébrique le nombre c^{2007}

EXERCICE 08

Le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points A,B , S et Ω d'affixes respectives:

$a = -2 + 4i$,$b = -4 + 2i$, $s = -5 + 5i$ et $w = -2 + 2i$

Et soit h l'homothétie de centre S et de rapport 3.

Et soit C l'image de A par l'homothétie h et D l'image de B par l'homothétie h.

1)a-Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie h.

b-Montrer que l'affixe du point C est $c = 4 + 2i$ et l'affixe du point D est $d = -2 - 4i$.

c-Montrer que les points A,B , C et D sont cocycliques.

2) soit P le milieu du segment $[AC]$.

a-Déterminer p l'affixe du point P.

b-Montrer que:

$$\frac{w - p}{d - p} = \frac{1}{2}i$$

Puis en déduire que: $DB = 2P\Omega$ et que:

$$\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{P\Omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

EXERCICE 09

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation:

$$\frac{1}{4}z^2 - \sqrt{3}z + 4 = 0$$

2) Dans Le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

On considère les points A,B et C d'affixes respectives:

$a = 2\sqrt{3} + 2i$,$b = 2\sqrt{3} - 2i$ et $c = -8i$.

a-Écrire sous la forme trigonométrique le nombre a et en déduire que a^{2022} est un réel négatif.

b-Montrer que:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Et en déduire que le triangle OAB est équilatéral.

3) Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle ${}^{2\pi}/_{3}$.

a-Montrer que:

$$z' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$$

b-Vérifier que $d = 4\sqrt{3} + 4i$ est l'affixe du point D l'image du point C par la rotation R.

c-Calculer ${}^{d}/_{a}$ et en déduire que les points O,A et D sont alignés.

EXERCICE 10

Session Normale 2017

On considère les nombres complexes a et b tels que:

$$a = \sqrt{3} + i \text{ et } b = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$$

1)a-Vérifier que: $b = (1 + i)a$.

b-En déduire que: $|b| = 2\sqrt{2}$ et $arg b \equiv {}^{5\pi}/_{12}\,[2\pi]$

c-Déduire de ce qui précède que:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

2) Le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points Aet B d'affixes respectives a et b et le point C d'affixe c telle que $c = -1 + i\sqrt{3}$.

a-Vérifier que $c = ia$ et en déduire que: $OA = OC$ et

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

b-Montrer que le point B est l'image du point A par la translation t de vecteur $\overrightarrow{OC}$.

c-En déduire que le quadrilatère $OABC$ est un carré.

EXERCICE 11

Session Normale 2018

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $2z^2+2z+5=0$.
2) Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère la rotation R De centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

a-Écrire sous la forme trigonométrique le nombre complexe $d=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

b-On considère le point A d'affixe $a=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$ et le point B image du point A par la rotation R. Soit b l'affixe du point B,Montrer que: $b=d.a$

3) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et C l'image de B par la translation t et c l'affixe du point C.

a-Vérifier que: $c=b+a$ et en déduire que:
$$c=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

b-Déterminer $\arg\left(\dfrac{c}{a}\right)$ puis en déduire que le triangle OAC est équilatéral.

EXERCICE 12

Session Rattrapage 2018

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$.
2) Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a=\sqrt{2}(1-i)$ et la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a-Écrire a sous forme trigonométrique.

b-Vérifier que l'affixe du point B l'image du point A par la rotation R est:
$$b=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

3)a-On considère le point C d'affixe $c=1+i$,Montrer que: $b^2-c^2=2\sqrt{3}$.

b- Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OD}$ et D l'image de B par la translation t .Montrer que: $OD=|b+c|$

c-En déduire que: $OD\times BC=2\sqrt{3}$

EXERCICE 13

Session Normale 2013

Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A,B et C d'affixes respectives: $a=7+2i$,$b=4+8i$ et $c=-2+5i$.

1)a-Vérifier que: $(1+i)(-3+6i)=-9+3i$ puis Montrer que:
$$\frac{c-a}{b-a}=1+i$$

b-En déduire que: $AC=AB\sqrt{2}$ et donner une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$.

2) Soit R la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a-Montrer que l'affixe du point D image du point A par la rotation R est $d=10+11i$.

b-Calculer $\dfrac{d-c}{b-c}$ et en déduire que les points B, C et D sont alignés.

EXERCICE 14

Session Rattrapage 2015

1) a-Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2-8z+32=0$.

b-On considère le nombre complexe: $a=4+4i$
Écrire le nombre complexe a sous forme trigonométrique, puis en déduire que a^{12} est un réel négatif.

2) Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A,B et C d'affixes respectives: $a=4+4i$,$b=2+3i$ et $c=3+4i$.
Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a-Montrer que: $z'=iz+7+i$

b-Vérifier que l'affixe du point D image du point A par la rotation R est $d=3+5i$.

c-Montrer que l'ensemble des points $M(z)$ tels que: $|z-3-5i|=|z-4-4i|$ est la droite (BC).

EXERCICE 15

Session Normale 2015

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2+10z+26=0$.
2) Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$,
On considère les points A,B , C et Ω d'affixes respectives: $a=-2+2i$,$b=-5+i$, $c=-5-i$ et $w=-3$.

a-Montrer que: $\dfrac{b-w}{a-w}=i$.

b-En déduire la nature du triangle ΩAB.

3) Soit D l'image du point C par la translation t du vecteur $\vec{u}$ d'affixe $6+4i$.

a-Montrer que l'affixe d du point D est: $d=1+3i$.

b-Montrer que: $\frac{b-d}{a-d}=2$ puis déduire que le point A est le milieu du segment $[BD]$.

EXERCICE 16

Session Normale 2014

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2-\sqrt{2}z+2=0$.

2) On considère le nombre complexe: $u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$

a-Montrer que le module de u est $\sqrt{2}$ et que:

$\arg(u)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

b-En utilisant l'écriture de u sous forme trigonométrique Montrer que: u^6 est un nombre réel.

3) Le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.On considère les points Aet B d'affixes respectives $a=4-4i\sqrt{3}$ et $b=8$.

Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a-Exprimer z' en fonction de z.

b-Vérifier que B est l'image de A par la rotation R et en déduire que le triangle OAB est équilatéral.

EXERCICE 17

Session Rattrapage 2016

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2-8z+41=0$.

2) Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$,

On considère les points A,B , C et Ω d'affixes respectives: $a=4+5i$,$b=3+4i$, $c=6+7i$ et $w=4+7i$.

a-Calculer $\frac{c-b}{a-b}$ puis en déduire que les points A,B et C sont alignés.

b- Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Montrer que: $z'=-iz-3+11i$

c-Déterminer l'image du point C par la rotation R,puis donner une forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{a-w}{c-w}$.

EXERCICE 18

Session Normale 2016

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2-4z+29=0$.

2) Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$,

On considère les points Ω , A et B d'affixes respectives: $w=2+5i$,$a=5+2i$, $b=5+8i$.

a-Soit u le nombre complexe tel que $u=b-w$

Vérifier que $u=3+3i$ puis Montrer que

$\arg(u)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

b-Déterminer un argument du nombre complexe $\bar{u}$.

c-Vérifier que: $a-w=\bar{u}$ puis en déduire que:

$$\Omega A=\Omega B\ et\ arg\left(\frac{b-w}{a-w}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

d-On considère la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'image du point A par la rotation R.

EXERCICE 19

Session Normale 2020

1) On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation:

$$(E): z^2-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})z+16=0$$

a-Vérifier que: $\Delta=-4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$.

b-En déduire les solutions de l'équation (E).

2) On considére les nombres complexes:

$$a=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})\ ;\ b=1+i\sqrt{3}$$

Et $c=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

a-Vérifier que: $b\bar{c}=a$ puis déduire que: $ac=4b$.

b- Écrire les deux nombres complexes a et b sous forme trigonométrique.

c-En déduire que:

$$a=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

3) Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.On considére les points B; C et D d'affixes respectives b ; c et d tel que $d=a^4$.

Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$.

a-Vérifier que:

$$z'=\frac{1}{4}az$$

b-Déterminer l'image du point C par la rotation R.

c-Déterminer la nature du triangle OBC.

d-Montrer que $a^4=128b$ et en déduire que les points O; B et D sont alignés.

EXERCICE 20

Session Rattrapage 2020

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2-\sqrt{2}z+1=0$.

2) On pose $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.

a- Écrire a sous forme trigonométrique puis en déduire que a^{2020} est un nombre réel.

b-Soit le nombre complexe $b=\cos(\dfrac{\pi}{8})+i\sin(\dfrac{\pi}{8})$

Montrer que: $b^2=a$.

3) Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$; on considère les points A,B et C d'affixes respectives a; b et c tel que $c=1$.

Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{8}$ et qui est transformer le point M d'affixe z au point M' d'affixe z'.

a-Vérifier que: $z'=bz$.

b-Déterminer l'image du point C par la rotation R, et Montrer que le point A est l'image du point B par la rotation R.

4)a-Montrer que: $|a-b|=|b-c|$ puis en déduire la nature du triangle ABC.

b-Déterminer une mésure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})$.

5) On considére la translation T de vecteur $\vec{u}$, et soit le point D est l'image du point A par la translation T.

a-Vérifier que l'affixe du point D est b^2+1.

b-Montrer que: $\dfrac{b^2+1}{b}=b+\overline{b}$ puis en déduire que les points O; B et D sont alignés.

EXERCICE 21

Session Rattrapage 2019

1)a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2-3z+3=0$.

b-On pose $a=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Écrire a sous forme trigonométrique.

2) On considère le nombre complexe $b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

Vérifier que $b^2=i$.

3) On pose $h=\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}$

Montrer que $h^4+1=a$

4) Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$; on considère le point B d'affixe b et R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

a-Soit c l'affixe du point C image du point B par la rotation R. Montrer que: $c=ib$.

b-En déduire la nature du triangle OBC.

EXERCICE 22

Session Rattrapage 2009

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2-8z+25=0$.

2) On considère dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$; on considère les points A,B ; C et D d'affixes respectives: $a=3+4i$; $b=3-4i$; $c=2+3i$ et $d=5+6i$.

a-Calculer $\dfrac{d-c}{a-c}$ et en déduire que les points A,C et D Sont alignés.

b-Montrer que le nombre complexe $p=3+8i$ est l'affixe du point P l'image du point A par l'homothéie de centre B et de rapport $\dfrac{3}{2}$.

3) Ecrire le nombre $\dfrac{d-p}{a-p}$ sous forme trigonométrique

Et en déduire que $\dfrac{\pi}{4}$ est la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PD}})$

Et $PA=\sqrt{2}PD$

EXERCICE 23

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2-\sqrt{2}z+1=0$.

2) On pose $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.

a- Écrire a sous forme trigonométrique puis en déduire que a^8 est un nombre réel.

3) Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$; on considère les points A,B et C d'affixes respectives a; b et c tels que: $b=\sqrt{2}+1+i$ et $c=\overline{b}$. Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

a-Montrer que: $z'=az$.

b-Vérifier que le point B est l'image du point C par la rotation R et en déduire la nature du triangle OBC.

c-En déduire que $\arg b\equiv\dfrac{1}{2}\arg a\,[2\pi]$ puis déterminer un argument du nombre complexe b.

4) On pose $h=\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}$

Montrer que: $h^4+a^8+\sqrt{2}=b$

EXERCICE 24

Devoir surveillé 20-21

Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A,B et C d'affixes respectives: $a=\sqrt{3}+i$,$b=1+i$ et $c=1-\sqrt{3}i$.

1) Déterminer la forme trigonométrique de a;b et c.

2) Montrer que: $a^{24}+b^{24}$ est un nombre reel.

3) Donner la forme trigonométrique de $\frac{c}{a}$ et en déduire la nature du triangle OAC.

4) Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{CO}$ et D l'image de A par la translation T avec d l'affixe de D.

a-Montrer que: $d=\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i$.

b-Vérifier que: $d=ab$.

c-En déduire $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

5) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que:

$$|z-1-i|=6$$

EXERCICE 25

Session Normale 2011

Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A,B et C d'affixes respectives: $a=9+i$,$b=9-i$ et $c=11-i$.

1)a-Montrer que: $\frac{c-b}{a-b}=-i$.

b-En déduire que le triangle ABC est rectangle isocéle en B.

2) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $4(1-i)$.

3) Montrer que: $(c-a)(c-b)=4(1-i)$ et en déduire Que: $AC\times BC=4\sqrt{2}$.

EXERCICE 26

1)On considère les nombres complexes suivants:

$$a=-\sqrt{2}(1+i) \text{ et } b=-\sqrt{3}+i$$

a-Déterminer la forme trigonométrique des nombres a et b .

b-Montrer que: $a^{12}+b^{12}=0$.

c-Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe $Z=\overline{a}\times b^2$.

3) Montrer les égalités suivantes:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2016}=1 \; et \; \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{37}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

4) On considère le nombre complexe:

$$z=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

a-Calculer z^2 puis déterminer $|z^2|$ et $arg(z^2)$.

b-En déduire une écriture trigonométrique du nombre complexe z.

c-Déduire de ce qui précède, les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ puis celle de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

d-Vérifier que: $z^{2016}\in\mathbb{R}^+$.

EXERCICE 27

Session Normale 2012

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2-12z+61=0$.

2) Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A,B et C d'affixes respectives: $a=6-5i$,$b=4-2i$ et $c=2+i$.

a-Calculer $\frac{a-c}{b-c}$ et en déduire que les points A,B et C Sont alignés.

b-On considère la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1+5i$.

Vérifier que l'affixe du point D image du point C par La translation T est $d=3+6i$.

c-Montrer que: $\frac{d-c}{b-c}=-1+i$ et que $\frac{3\pi}{4}$ est un argument du nombre complexe $-1+i$.

d-En déduire la mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}}\right)$

EXERCICE 28

Session Rattrapage 2011

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2-6z+18=0$.

2) Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives: $a=3+3i$ et $b=3-3i$

a-Ecrire les nombres complexes a et b sous forme trigonométrique.

b-Montrer que b' l'affixe du point B' l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ est 6.

c-Montrer que: $\frac{b-b'}{a-b'}=i$ et en déduire le triangle $AB'B$ est isocéle et rectangle en B'.

d-En déduire que le quadrilatère $OAB'B$ est un carré.

EXERCICE 28

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2 - 8z + 25 = 0$.

2) On considère dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$; on considère les points A,B et C d'affixes respectives: $a = 4 + 3i$; $b = 4 - 3i$ et $c = 10 + 3i$.

Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

a-Montrer que l'affixe du point D l'image du point A par la translation T est $d = 10 + 9i$.

b-Vérifier que: $\frac{b-a}{d-a} = \frac{-1}{2}(1+i)$ et Ecrire $\frac{-1}{2}(1+i)$ sous forme trigonométrique.

c-Montrer que:

$$\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{5\pi}{4}\,[2\pi]$$