

SÉRIE D'EXERCICES N° 1
ORDRES ET OPÉRATIONS

Exercice 1

- ① Comparer a et b pour chacun des cas suivantes :
- $a = \frac{4}{5}$ et $b = \frac{-3}{2}$ ➤ $a = \frac{-5}{7}$ et $b = \frac{3}{7}$ ➤ $a = \frac{8}{6}$ et $b = \frac{8}{3}$ ➤ $a = \frac{3}{7}$ et $b = \frac{4}{9}$
- ② Soit $a - b = -\sqrt{2}$. Comparer a et b . (a et b sont des nombres réels non nuls).
- ③ Soient $a = \frac{3}{7}$ et $b = \frac{4}{9}$.
- ⓐ calculer $a - b$ et déduire la comparaison de a et b .
- ⓑ rendre au même dénominateur a et b et déduire la comparaison de a et b .
- ④ Soient $a = 2\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{11}$.
- ⓐ Calculer a^2 et b^2 et déduire la comparaison de a et b .
- ⓑ Montrer que $a - b = \frac{1}{2\sqrt{3} + \sqrt{11}}$. Déduire la comparaison de a et b .

Exercice 2

- ① Comparer a et b pour chacun des cas suivants :
- $a = 2\sqrt{3} + \sqrt{10}$ et $b = \sqrt{11} + \sqrt{10}$ ➤ $a = \sqrt{2\sqrt{3} + \sqrt{10}}$ et $b = \sqrt{\sqrt{11} + \sqrt{10}}$
 ➤ $a = 2\sqrt{3} - 7$ et $b = \sqrt{11} - 7$ ➤ $a = 4\sqrt{3}$ et $b = 4\sqrt{5}$ ➤ $a = -5\sqrt{5}$ et $b = -5\sqrt{5}$
- ② Soient $a = 7\sqrt{2}$ et $b = 5\sqrt{3}$
- ⓐ Comparer a et b .
- ⓑ Déduire la comparaison de $7\sqrt{2} + 9$ et $5\sqrt{3} + 9$
- ⓒ Déduire la comparaison de $\frac{1}{7\sqrt{2} + 9}$ et $\frac{1}{5\sqrt{3} + 9}$
- ③ Comparer $-5\sqrt{2}$ et $-4\sqrt{2}$, déduire la comparaison de $\frac{1}{-5\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{-4\sqrt{2}}$

Exercice 3

- x et y deux nombres réels non nuls, tels que : $4 < x < 5$ et $-3 < y < -2$.
- ① Encadrer ➤ $2x$ ➤ $-2x$ ➤ $3y$ ➤ $-3y$ ➤ x^2 ➤ y^2 ➤ $x + y$
 ➤ $x - y$ ➤ xy ➤ $3x - 5y$
- ② Montrer que $6 < (x + y)(x - y) < 24$
- ③ z est un nombre réel tel que $3 \leq 5z - 2 \leq 8$. Montrer que $1 \leq z \leq 2$.

Exercice 4

- Résoudre les inéquations suivantes et représenter les solutions sur un axe (si possible)
- $3x + 1 \geq -1$ ➤ $-2x + 5 \leq 0$ ➤ $x\sqrt{5} + 3 > 2$ ➤ $x + 2(x - 5) \leq 3x$ ➤ $\frac{2}{7}x + \frac{1}{3} > x - \frac{1}{8}$
- $\sqrt{3}x + 3 < \sqrt{3}x + 1$

Exercice 5

On pose a, b et m des nombres réels ($a > 0, b > 0$ et $m < 0$)

- ① Comparer $a + m$ et m $\rightarrow a + m$ et $a - m$
- ② Comparer $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ et 2 $\rightarrow a + b$ et $2\sqrt{ab}$ $\rightarrow \frac{1}{a^2} + a^2$ et 2 $\rightarrow a^2 + b^2$ et $2ab$
- ③ ABC est un triangle rectangle en A tels que $2.999 < AB < 3.001$ et $1.999 < AC < 2.001$.
Montrer que $3.604 < BC < 3.607$

Exercice 6

On pose : $a = \sqrt{45} + 2\sqrt{5}$ et $b = 3\sqrt{20}$

- ① Montrer que : $a - b = -\sqrt{5}$
- ② En déduire la comparaison de a et b

Exercice 7

- ① Comparer : $2\sqrt{3}$ et $\sqrt{13}$
- ② En déduire la comparaison de ce qui suit :
 - $\rightarrow -2\sqrt{3}$ et $-\sqrt{13}$ $\rightarrow 2\sqrt{3} - 5$ et $\sqrt{13} - 5$ $\rightarrow 1 - 6\sqrt{3}$ et $1 - 3\sqrt{13}$
 - $\rightarrow \frac{5}{2\sqrt{3}}$ et $\frac{5}{\sqrt{13}}$ $\rightarrow \frac{1}{2\sqrt{3} + 3}$ et $\frac{1}{\sqrt{13} + 3}$ $\rightarrow \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$ et $\sqrt{5 + \sqrt{13}}$
- ③
 - a) Développer et réduire : $(2\sqrt{3} - \sqrt{13})^2$
 - b) En déduire une simplification de : $\sqrt{25 - 4\sqrt{39}}$

Exercice 8

- ① x et y deux nombres réels tel que $x \leq y$. Comparer x et $\frac{2x + y}{3}$
- ② a un nombre réel tel que $a \geq 3$. Montrer que : $\frac{1 - a}{2} \leq -1$
- ③ m et n deux nombres réels strictement positifs. Montrer que : $\frac{m + 2n}{4n} \geq \frac{2m}{m + 2n}$

Exercice 9

On pose x, y et z trois nombres réels tels que : $-4 \leq x \leq 5$ et $-5 \leq y \leq -3$ et $3 \leq z \leq 7$

- ① Encadrer $\rightarrow 2y - 1$ $\rightarrow -x + 5$ $\rightarrow z - y$ $\rightarrow yz$ $\rightarrow y^2 + z^2$ $\rightarrow \frac{x - 3y}{y^2 + 2}$
- ② Simplifier : $U = \sqrt{(y + 3)^2} + \sqrt{(y + 5)^2}$ et $V = \sqrt{(x + 4)^2} - \sqrt{(x - 5)^2} + (1 - 2x)$

Exercice 10

On pose x un nombre réel positif tel que : $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{\sqrt{x + 3}} \leq \frac{1}{2}$. Montrer que : $1 \leq x \leq 6$

Exercice 11

Soient x et y deux nombres réels positifs tels que : $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ et $0 \leq y^2 + 2y - x^2 \leq 1$. Montrer que : $0 \leq y \leq 1$

Exercice 12

Comparer les nombres suivants :

- | | |
|---|--|
| ① $a = \sqrt{8}$ et $b = 3$ | ⑧ $a = -\sqrt{3}$ et $b = -2\sqrt{10}$ |
| ② $a = 3\sqrt{5}$ et $b = \sqrt{37}$ | ⑨ $a = -10\sqrt{2}$ et $b = -9\sqrt{3}$ |
| ③ $a = 2\sqrt{5}$ et $b = 5$ | ⑩ $a = 2 + 2\sqrt{2}$ et $b = 2 + \sqrt{10}$ |
| ④ $a = 2\sqrt{3}$ et $b = 3\sqrt{2}$ | ⑪ $a = 2\sqrt{3} + \sqrt{11}$ et $b = \sqrt{11} + \sqrt{10}$ |
| ⑤ $a = \sqrt{5}$ et $b = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ | ⑫ $a = 1 + \sqrt{6}$ et $b = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ |
| ⑥ $a = 6 + \sqrt{3}$ et $b = 6 + \sqrt{5}$ | ⑬ $a = \sqrt{17} - \sqrt{11}$ et $b = \sqrt{5} - \sqrt{40}$ |
| ⑦ $a = 20\sqrt{2}$ et $b = -7\sqrt{14}$ | ⑭ $a = 3 + \sqrt{3}$ et $b = \sqrt{27} + 1$ |

Exercice 13

Soit a et b deux nombres réels tels que : $1 \leq \frac{a-4}{2} \leq \frac{3}{2}$ et $-5 \leq b \leq -4$

- ① Montrer que : $6 \leq a \leq 7$
- ② Encadrer les nombres $\rightarrow a + b \rightarrow a \times b \rightarrow 3a - 2b$
- ③ Montrer que : $\sqrt{2} \leq \sqrt{\frac{a}{a+b}} \leq \sqrt{7}$

Exercice 14

x et y deux nombres réels tel que : $2 \leq x \leq 5$ et $1 \leq y \leq 4$

Encadrer :

- | | | |
|-----------------------------|-------------------------------|---------------------------|
| $\rightarrow x + 5$ | $\rightarrow 3x$ | $\rightarrow -5y$ |
| $\rightarrow y - 3$ | $\rightarrow xy$ | $\rightarrow \frac{1}{x}$ |
| $\rightarrow \frac{1}{y}$ | $\rightarrow \frac{x+y}{x-y}$ | $\rightarrow x - y$ |
| $\rightarrow \frac{1}{x+y}$ | $\rightarrow 3x - 2y$ | $\rightarrow 2x + y$ |
| $\rightarrow -4x + 3y$ | | |

Exercice 15

Soit x un nombre réel positif, Comparer les nombres réels a et b dans chacun des cas suivants :

- ① $a = x + 4$ et $b = x - 5$
- ② $a = 2x + \sqrt{3}$ et $b = 2x - \sqrt{7}$
- ③ $a = 4x + 1$ et $b = 5x + 1$

SÉRIE D'EXERCICES N° 2
ORDRES ET OPÉRATIONS

Exercice 1

► x et y deux nombres réels positifs, tels que $x \leq y$.
Comparer ce qui suit, en utilisant l'un des deux symboles \geq ou \leq .

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-------------------|-----------------------------------|
| ① $x - y \dots 0$ | ③ $y - x \dots 0$ | ⑤ $7x \dots 7y$ | ⑦ $-7x \dots -7y$ |
| ② $x + 3 \dots y + 3$ | ④ $x - 3 \dots y - 3$ | ⑥ $x^2 \dots y^2$ | ⑧ $\frac{1}{x} \dots \frac{1}{y}$ |

Exercice 2

► a et b et c des nombres réels, tels que : $2 \leq a \leq 5$ et $1 \leq b \leq 4$ et $-5 \leq c \leq -3$.
Compléter les encadrement suivants :

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|
| ① $\dots \leq a + b \leq \dots$ | ⑤ $\dots \leq 3c \leq \dots$ | ⑨ $\dots \leq -a \leq \dots$ |
| ② $\dots \leq b + c \leq \dots$ | ⑥ $\dots \leq \frac{1}{a} \leq \dots$ | ⑩ $\dots \leq a \times b \leq \dots$ |
| ③ $\dots \leq a - c \leq \dots$ | ⑦ $\dots \leq \frac{1}{c} \leq \dots$ | ⑪ $\dots \leq a^2 \leq \dots$ |
| ④ $\dots \leq 3a \leq \dots$ | ⑧ $\dots \leq -3a \leq \dots$ | ⑫ $\dots \leq c^2 \leq \dots$ |

Exercice 3

- ① Comparer a et b dans chacun des cas suivants :

① a $a - b = -\sqrt{5}$ ② b $a = 11 - 3\sqrt{5}$ et $b = 8 - 5\sqrt{3}$

- ② Prouver que : $2\sqrt{5} < 5$?
- ③ Ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant :
 $\blacktriangleright 6 \blacktriangleright 4\sqrt{2} \blacktriangleright 2\sqrt{5} \blacktriangleright 3\sqrt{3}$
- ④ Déterminer le signe de $3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$, justifier ta réponse.
- ⑤ En déduire que : $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} < \sqrt{10 - 3\sqrt{2}}$?

Exercice 4

► x et y et z des nombres réels tels que : $3 \leq x \leq 5$ et $1 \leq y \leq 2$ et $-4 \leq z \leq -2$.
Répondez par vraie ou faux aux questions suivantes ::

- ① L'encadrement de $x + y$ est $3 + 1 \leq x + y \leq 5 + 2$
- ② L'encadrement de $x - y$ est $3 - 1 \leq x - y \leq 5 - 2$
- ③ L'encadrement de $2x$ est $2 \times 3 \leq 2x \leq 2 \times 5$
- ④ L'encadrement de $-2x$ est $-2 \times 3 \leq -2x \leq -2 \times 5$

- ⑤ L'encadrement de $x \times y$ est $3 \times 1 \leq x \times y \leq 5 \times 2$
- ⑥ L'encadrement de $y \times z$ est $1 \times (-4) \leq y \times z \leq 2 \times (-2)$
- ⑦ L'encadrement de x^2 est $3^2 \leq x^2 \leq 5^2$
- ⑧ L'encadrement de z^2 est $(-4)^2 \leq z^2 \leq (-2)^2$
- ⑨ L'encadrement de $\frac{1}{x}$ est $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$
- ⑩ L'encadrement de $\frac{1}{z}$ est $\frac{1}{-2} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{1}{-4}$
- ⑪ L'encadrement de $\frac{x}{y}$ est $3 \times \frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 5 \times \frac{1}{1}$
- ⑫ L'encadrement de $\frac{x}{z}$ est $3 \times \frac{1}{-2} \leq \frac{x}{z} \leq 5 \times \frac{1}{-4}$

Exercice ⑤

▮▮▮ a et b deux nombres réels.

Encadrer $a + b$ dans chacun des cas suivants :

- ① $1 \leq a \leq 2$ et $6 \leq b \leq 8$
- ② $3 \leq a \leq 5$ et $-3 \leq b \leq 1$
- ③ $0 \leq a \leq 10$ et $-6 \leq b \leq -2$

Exercice ⑥

▮▮▮ a et b deux nombres réels.

Encadrer $a - b$ dans chacun des cas suivants :

- ① $1 \leq a \leq 2$ et $6 \leq b \leq 8$
- ② $3 \leq a \leq 5$ et $-3 \leq b \leq 1$
- ③ $0 \leq a \leq 10$ et $-6 \leq b \leq -2$

Exercice ⑦

▮▮▮ a et b deux nombres réels.

Encadrer $a \times b$ dans chacun des cas suivants :

- ① $3 \leq a \leq 6$ et $2 \leq b \leq 4$
- ② $2 \leq a \leq 3$ et $-5 \leq b \leq -1$
- ③ $-4 \leq a \leq -1$ et $-5 \leq b \leq -3$

Exercice ⑧

➤ x est un nombre réel,

Dans chacun des cas suivants, donner un encadrement de x^2 :

- ① $2 \leq x \leq 5$
- ② $-4 \leq x \leq -1$.

➤ b est un nombre réel,

Dans chacun des cas suivants, donner un encadrement de $3b$:

- ③ $2 \leq b \leq 5$
- ④ $-4 \leq b \leq -1$.

➤ y est un nombre réel,

Dans chacun des cas suivants, donner un encadrement de $-3y$:

e $2 \leq y \leq 5$ f $-4 \leq y \leq -1$.

► a est un nombre réel,

Dans chacun des cas suivants, donner un encadrement de $\frac{1}{a}$:

g $2 \leq a \leq 5$ h $-4 \leq a \leq -1$.

Exercice 9

►► a et b deux nombres réels,

Dans chacun des cas suivants, donner un encadrement de $\frac{a}{b}$:

① $6 \leq a \leq 8$ et $1 \leq b \leq 2$ ② $-10 \leq a \leq -4$ et $1 \leq b \leq 2$ ③ $-12 \leq a \leq -9$ et $-3 \leq b \leq -1$

Exercice 10

- ① Sachant que $x < -2$, comparer 13 et $-5x + 3$.
- ② a et b deux nombres réels, montrer que : $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
- ③ a est un nombre réel, montrer que $a^2 - 12a \geq -36$.
- ④ a et b deux nombres réels tel que $a = b - 3$, comparer a et b .
- ⑤ x et y deux nombres réels tel que $x - 1 = y - 1$, comparer x et y .
- ⑥ a et b deux nombres réels strictement positifs, montrer que : $\frac{a^2 + b^2}{2ab} \geq 1$.
- ⑦ x est un nombre réel strictement positif, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
- ⑧ x est un nombre réel tel que $x \leq 5$. Montrer que : $\frac{1-x}{4} \geq -1$.
- ⑨ a est un nombre réel tel que $a \geq -2$. Montrer que : $\frac{-3a+4}{5} \leq 2$.
- ⑩ x est un nombre réel, montrer que : $(x+5)^2 \geq 20x$.
- ⑪ Sachant que : $1 \leq \sqrt{3} \leq 2$, encadrer $\sqrt{7+2\sqrt{3}}$.
- ⑫ Sachant que : $-5 \leq 2a - 3 \leq 1$, encadrer a .
- ⑬
 - a Comparer les nombres : $\sqrt{3} + \sqrt{15}$ et $2\sqrt{15}$
 - b Sachant que : $1 < \sqrt{3} < 2$ et $3 < \sqrt{15} < 4$, encadrer $\sqrt{3} + \sqrt{15}$ et $\sqrt{3} - \sqrt{15}$
 - c Montrer que : $\sqrt{3} \times \sqrt{15} = 3\sqrt{5}$, et en déduire l'encadrement de $\sqrt{5}$.
- ⑭ Sachant que : $-2 \leq a + 1 \leq -1$, encadrer :

► $5a - 2$ ► $-a + \sqrt{2}$ ► a^2 ► $\frac{1}{a+1}$
- ⑮ x et y deux nombres réels positifs tel que :

$$\frac{1}{3} \leq \frac{x-2}{3} \leq 1 \text{ et } 1 \leq (2y-1)^2 - 3 \leq 6.$$
 Montrer que : $3 \leq x \leq 5$ et $\frac{3}{2} \leq y \leq 2$
- ⑯ x et y deux nombres réels positifs, montrer que : $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$