❖ Matière : Mathématique

❖ Niveau : 3.A.C.P.I

❖ prof : OILADALI Youssef

❖ Année Scolaire : 2021/2022

❖ Date : 23 mars 2022

❖ Page Facebook : YOOMATHS

Série N° 1
Repérage dans le plan

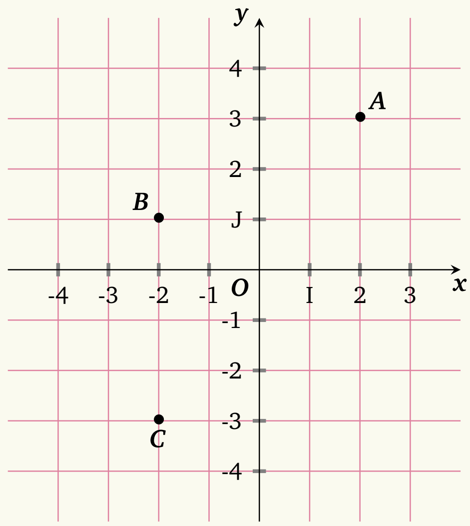
Exercice 1

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points $A(-1;-2)$, $B(1;4)$ et $C(4;3)$

1. Placer les points A, B et C
2. Montrer que $\overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
3. Déterminer les coordonnées de D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme
4. Montrer que le point $M(3;0)$ est milieu du segment $[CD]$.

Exercice 2

1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, O, I et J
2. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$, et calculer OI et OJ
3. Montrer que le point $O(0;0)$ est milieu du segment $[AC]$
4. Déterminer les coordonnées de D symétrique de B par rapport à O
5. Déterminer la nature de quadrilatère $ABCD$
6. Déterminer les coordonnées de M l'image de C par le déplacement dont le vecteur $\overrightarrow{OB}$
7. Montrer que le quadrilatère $BMCO$ est un parallélogramme.



Exercice 3

Dans le repère orthonormé direct (O, I, J), on considère les deux points $A(0;5)$ et $B(4;2)$

1.
   a. Représenter A et B
   b. Vérifier que le point $K(2;1)$ est milieu du segment $[OB]$
   c. Calculer les distances AB et AO
2. Soit C le point qui vérifie $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO}$
   a. Déterminer les coordonnées du point C
   b. Montrer que le quadrilatère $OABC$ est un losange.

Exercice 4

Dans le repère orthonormé direct (O, I, J), on considère les points : $A(6;3)$, $B(2;5)$ et $C(-2;-3)$
Et soit (C) le cercle dont l'un de ses diagonales est le segment $[AC]$

1. Placer les points A, B et C
2. Déterminer la nature du triangle ABC
3. Déterminer les coordonnées de E centre du cercle (C) et calculer son rayon
4. Déterminer les coordonnées du point D tels que : $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{EB}$
5. Déterminer la nature de quadrilatère $ABCD$.

Exercice 5

Montrer que les points $A(-3;4)$, $B(0;3)$ et $C(3;2)$ sont alignés.

Solution de l'exercice 1

Dans un repère orthonormée direct, on considère les points $A(-1;-2)$, $B(1;4)$ et $C(4;3)$

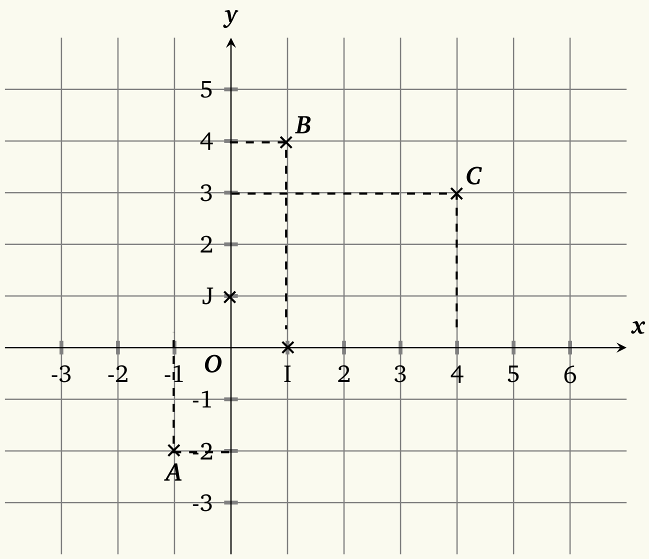
1. Placer les points A, B, et C

2. Montrer que $\overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

   On a $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$ et $\overrightarrow{BJ}(x_J - x_B; y_J - y_B)$

$$\overrightarrow{AB}(1-(-1);4-(-2)) \quad et \quad \overrightarrow{BJ}(0-1;1-4)$$
$$\overrightarrow{AB}(2;6) \quad et \quad \overrightarrow{BJ}({\color{red}-1};{\color{blue}-3})$$
$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\left(2\times\left(-\frac{1}{2}\right);6\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}({\color{red}-1};{\color{blue}-3})$$

   Donc $\underline{\overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$.



3. Déterminer les coordonnées de D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

   $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

   Et on a : $\overrightarrow{DC}(x_C - x_D; y_C - y_D)$
   Alors $\overrightarrow{DC}({\color{red}4-x_D};{\color{blue}3-y_D})$ et $\overrightarrow{AB}({\color{red}2};{\color{blue}6})$

   Puisque : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $\begin{cases} {\color{blue}2 = 4 - x_D} \\ {\color{red}6 = 3 - y_D} \end{cases}$

   Alors $\begin{cases} x_D = 4-2 = 2 \\ y_D = 3-6 = -3 \end{cases}$
   Les coordonnées du point D sont donc : $\underline{D(2;-3)}$

4. Montrer que le point $M(3;0)$ est milieu du segment $[CD]$.
   On a :

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_C + x_D}{2} = \dfrac{4+2}{2} = 3 \\ y_M = \dfrac{y_C + y_D}{2} = \dfrac{3+(-3)}{2} = 0 \end{cases}$$

Donc $\underline{M(3;0)}$

Solution de l'exercice 2

(1) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, O, I et J.

$O(0;0)$ $I(1;0)$ $J(0;1)$ $A(2;3)$ $B(-2;1)$ $C(-2;-3)$

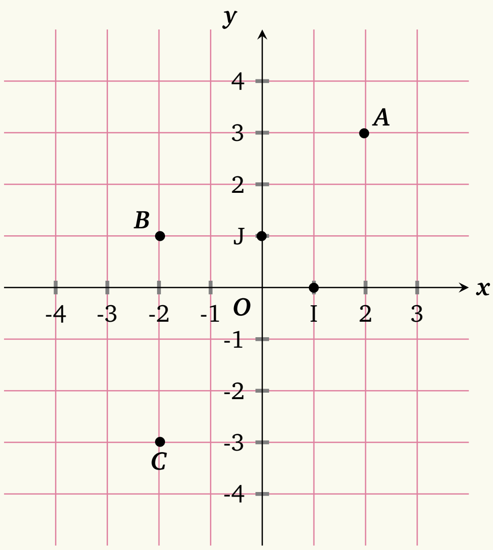
(2) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$, et calculer OI et OJ

On a : $\overrightarrow{OI}(x_I - x_O; y_I - y_O)$ et $\overrightarrow{OJ}(x_J - x_O; y_J - y_O)$

$$\overrightarrow{OI}(1-0;0-0) \;\; et \;\; \overrightarrow{OJ}(0-0;1-0)$$
$$\overrightarrow{OI}(1;0) \;\; et \;\; \overrightarrow{OJ}(0;1)$$

Donc

$$OI = \sqrt{1^2+0^2} = \sqrt{1} = 1$$
$$OJ = \sqrt{0^2+1^2} = \sqrt{1} = 1$$



(3) Montrer que $O(0;0)$ est le milieu du segment $[AC]$

On a : $x_O = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{2+(-2)}{2} = 0$ et $y_O = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{3+(-3)}{2} = 0$

Donc $O(0;0)$ est le milieu du segment $[AC]$

(4) Déterminer les coordonnées du point D symétrique de B par rapport au point O.

D symétrique de B par rapport au point O alors O est le milieu du segment $[BD]$

On a $x_O = \dfrac{x_B + x_D}{2}$ et $y_O = \dfrac{y_B + y_D}{2}$

$$2x_O = x_B + x_D \;\; et \;\; 2y_O = y_B + y_D$$
$$2 \times 0 = -2 + x_D \;\; et \;\; 2 \times 0 = 1 + y_D$$
$$0 + 2 = x_D \;\; et \;\; 0 - 1 = y_D$$
$$x_D = 2 \;\; et \;\; y_D = -1$$

Donc $\underline{D(2;-1)}$

5) Déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$

On a $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$ et $\overrightarrow{DC}(x_C - x_D; y_C - y_D)$

Donc $\overrightarrow{AB}(-2-2; 1-3)$ et $\overrightarrow{DC}(-2-2; -3-(-1))$

Donc $\overrightarrow{AB}(-4; -2)$ et $\overrightarrow{DC}(-4; -2)$

On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $ABCD$ est un parallélogramme.

6) Déterminer les coordonnées du point M l'image de C par la translation $\overrightarrow{OB}$

M l'image de C par la translation $\overrightarrow{OB}$ alors $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OB}$

On a $\overrightarrow{OB}(x_B - x_O; y_B - y_O)$ alors $\overrightarrow{OB}(-2-0; 1-0)$

Et $\overrightarrow{CM}(x_M - (-2); y_M - (-3))$ alors $\overrightarrow{CM}(-2; 1)$

Donc $\begin{cases} x_M + 2 = -2 \\ y_M + 3 = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_M = -2-2 = -4 \\ y_M = 1-3 = -2 \end{cases}$

Donc $\underline{M(-4; -2)}$

7) Montrer que le quadrilatère $BMCO$ est un parallélogramme

On a d'après la question précédente : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OB}$ alors $BMCO$ est un parallélogramme

Solution de l'exercice 3

Dans un repère orthonormée (O, I, J), on considère les deux points : $A(0; 5)$ et $B(4; 2)$

1) a) Représenter les deux points A et B

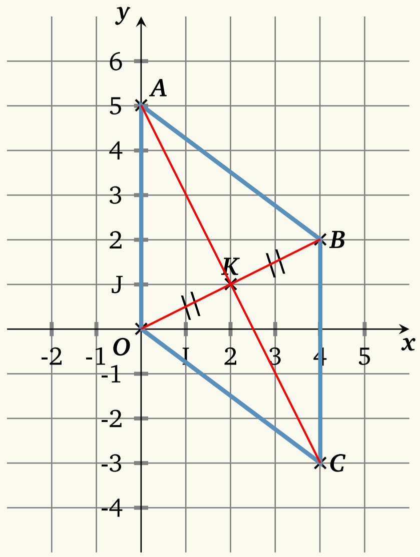
b) Vérifier que le point $K(2; 1)$ est le milieu du segment $[OB]$

On a : $x_K = \dfrac{x_O + x_B}{2}$ $\;et\;$ $y_K = \dfrac{y_O + y_B}{2}$

c-à-d : $x_K = \dfrac{0+4}{2} = 2$ $\;et\;$ $y_K = \dfrac{0+2}{2} = 1$

Donc $\underline{K(2; 1)}$

c) Calculer les distances AO et AB



$$\begin{aligned} AO &= \sqrt{(x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(0-0)^2 + (0-5)^2} \\ &= \sqrt{25} = \underline{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(4-0)^2 + (2-5)^2} \\ &= \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{25} = \underline{5} \end{aligned}$$

2. Soit C le point qui vérifie $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC}$

   a. Déterminer les coordonnées du point C

   On a $\overrightarrow{AO}(x_O - x_A; y_O - y_A)$

   alors $\overrightarrow{AO}(0-0; 0-5)$

   donc $\overrightarrow{AO}(0; -5)$

   On a $\overrightarrow{BC}(x_C - x_B; y_C - y_B)$

   alors $\overrightarrow{BC}(x_C - 4; y_C - 2)$

   Et puisque $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO}$ alors les deux vecteurs ont les mêmes coordonnées.

   Donc $\begin{cases} x_C - 4 = 0 \\ y_C - 2 = -5 \end{cases}$

   Signifie que $\begin{cases} x_C = 0 + 4 = 4 \\ y_C = -5 + 2 = -3 \end{cases}$

   Donc $\underline{C(4; -3)}$

   b. Montrer que le quadrilatère $OABC$ est un losange.

   On a : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO}$ alors $OABC$ est un parallélogramme et puisqu'il a deux côtés consécutifs égales (car $AB = AO$) donc $OABC$ est un losange.

Solution de l'exercice 4

1. Dans un repère orthonormée (O, I, J), on considère les points : $A(6; 3)$, $B(2; 5)$ et $C(-2; -3)$ soit (C) le cercle dont un de ses diagonales est le segment $[AC]$

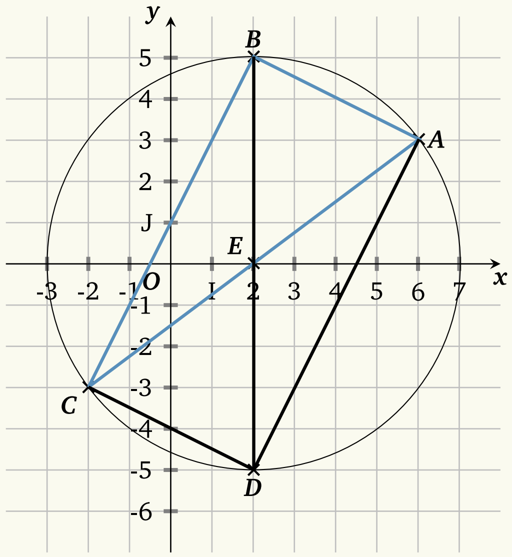
2. Placer les points A, C et B

3. Déterminer la nature du triangle ABC

   $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$ donc $\overrightarrow{AB}(-4; 2)$

   $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A)$ donc $\overrightarrow{AC}(-8; -6)$

   $\overrightarrow{BC}(x_C - x_B; y_C - y_B)$ donc $\overrightarrow{BC}(-4; -8)$



$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (2)^2} \\ &= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{64+36} \\ &= \sqrt{100} = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{16+64} = \sqrt{80} \end{aligned}$$

Donc $AB^2 = \sqrt{20}^2 = 20$ et $AC^2 = 10^2 = 100$ et $BC^2 = \sqrt{80}^2 = 80$

et puisque $AC^2 = AB^2 + BC^2$ alors d'après le théorème réciproque de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en B.

4 Déterminer les coordonnées du point E le centre du cercle (C) et calculer son rayon

E est le centre du cercle (C) donc E est le milieu du diagonale $[AC]$

On a $\begin{cases} x_E = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{6+(-2)}{2} = 2 \\ y_E = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{3+(-3)}{2} = 0 \end{cases}$

Donc $\underline{E(2;0)}$

5 Déterminer les coordonnées du point D sachant que $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{EB}$

On a : $\overrightarrow{EB}(x_B - x_E; y_B - y_E)$
Alors $\overrightarrow{EB}(2-2; 5-0)$
Donc $\overrightarrow{EB}(0;5)$

Alors $-2\overrightarrow{EB}(0 \times (-2); 5 \times (-2))$
Donc $-2\overrightarrow{EB}(0; -10)$ et $\overrightarrow{BD}(x_D - 2; y_D - 5)$

Et puisque $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{EB}$ donc les deux vecteurs ont les mêmes coordonnées.

Donc $\begin{cases} x_D - 2 = 0 \\ y_D - 5 = -10 \end{cases}$

C-à-d : $\begin{cases} x_D = 2 - 0 = 2 \\ y_D = -10 + 5 = -5 \end{cases}$

Donc $\underline{D(2;-5)}$

6 Déterminer la nature de $ABCD$

On a $\overrightarrow{DC}(x_C - x_D ; y_C - y_D)$
Alors $\overrightarrow{DC}(-2-2 ; -3-(-5))$
Donc $\overrightarrow{DC}(-4 ; 2)$

D'autre part,
on a : $\overrightarrow{AB}(-4 ; 2)$ et $\overrightarrow{DC}(-4 ; 2)$
Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Solution de l'exercice 5

Montrons que les points $A(-3 ; 4)$, $B(0 ; 3)$ et $C(3 ; 2)$ sont alignés.

On a $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ alors $\overrightarrow{AB}(0-(-3) ; 3-4)$
Donc $\overrightarrow{AB}(3 ; -1)$

On a $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A ; y_C - y_A)$ alors $\overrightarrow{AC}(3-(-3) ; 2-4)$
Donc $\overrightarrow{AC}(6 ; -2)$

Donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, et puisque les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ partagent le même point A, alors les points A, B et C sont alignés.

YOOMATHS