

# LA ROTATION DANS LE PLAN

## I) RAPPELLES ET COMPLEMENTS

### 1) La symétrie axiale.

#### Définition

Soit  $(D)$  une droite donnée. On dit que le point  $M'$  est le symétrique du point  $M$  par rapport à  $(D)$  si :

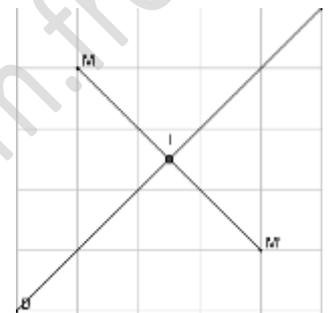
- $M' = M$  si  $M \in (D)$
- $(D)$  est la médiatrice du segment  $[MM']$ , si  $M \notin (D)$ .

La relation qui lie le point  $M$  à  $M'$  s'appelle la **symétrie axiale d'axe  $(D)$**  ; se note par  $S_{(D)}$ .

On écrit :  $S_{(D)}(M) = M'$ .

#### Remarques :

- Si  $M \notin (D)$  alors  $M' = S_{(D)}(M) \neq M$  et  $(D)$  est la médiatrice du segment  $[MM']$  c'est-à-dire passe par  $I$  milieu de  $[MM']$  et perpendiculaire à  $(MM')$ .
- Si  $N \in (D)$  alors  $S_{(D)}(N) = N$  on dit que  $N$  est invariant par  $S_{(D)}$
- Inversement si un point  $N$  est invariant par  $S_{(D)}$  alors  $N \in (D)$

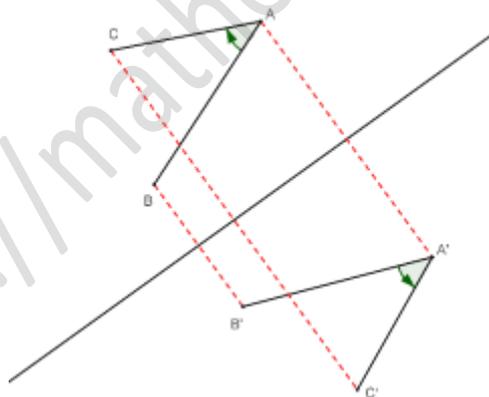


#### Propriétés :

La symétrie axiale conserve :

- Les distances : si  $M' = S_{(D)}(M)$  et  $N' = S_{(D)}(N)$  alors  $MN = M'N'$
- Le milieu d'un segment et en générale le barycentre d'un système pondéré.
- les mesures des angles **géométriques**
- Le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

La symétrie axiale inverse les mesures des angles orientés :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) \quad [2\pi]$



#### Propriété :

La symétrie axiale  $S_{(D)}$  est une bijection et sa bijection réciproque est elle-même

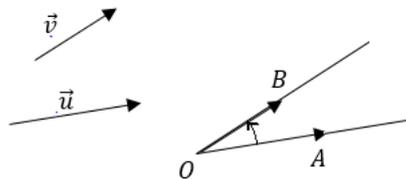
#### Preuve :

$$S_{(D)}(M) = M' \Leftrightarrow S_{(D)}(M') = M$$

**2) Les angles orientés**

**Définition :**

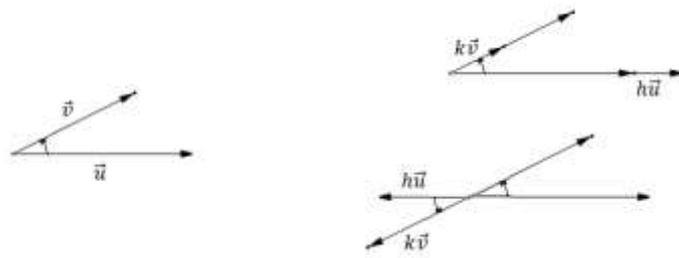
Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls ; et soient  $A$  et  $B$  deux points du plan orienté tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ .  
 l'angle orienté des demis droites  $[OA)$  ;  $[OB)$  s'appelle aussi angle orienté des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et on le note par :  $(\vec{u}, \vec{v})$ . la mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}, \vec{v})$  est la mesure de l'angle orienté  $([OA), [OB))$  et se note par  $(\vec{u}, \vec{v})$ .



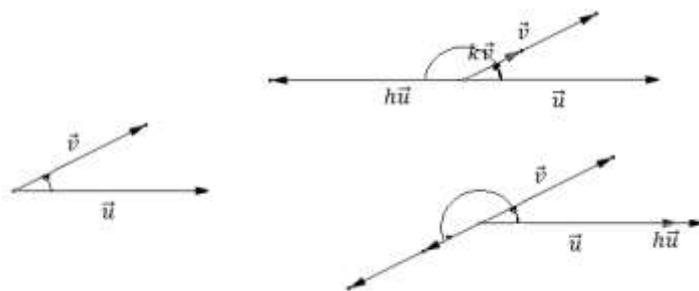
**Propriétés :**

Soient  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $h$  et  $k$  deux réels non nuls ; on a :

- $(\vec{v}, \vec{u}) \equiv -(\vec{u}, \vec{v}) \pmod{2\pi}$
- si  $hk > 0$  alors :  $(h\vec{u}, k\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) \pmod{2\pi}$

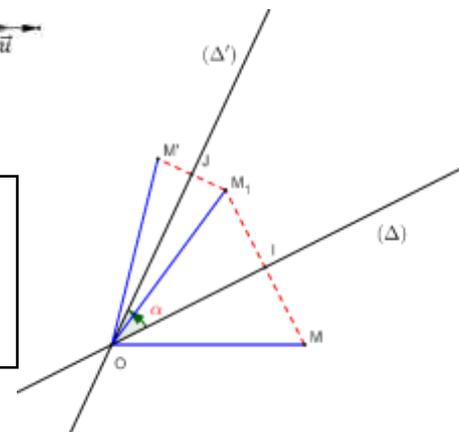


- si  $hk < 0$  alors :  $(h\vec{u}, k\vec{v}) \equiv \pi + (\vec{u}, \vec{v}) \pmod{2\pi}$



**Propriété :**

Soient  $(D)$  et  $(\Delta)$  deux droites de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et qui se coupent en  $A$ , soient  $B$  un point de  $(D)$  et  $C$  un point de  $(\Delta)$ .  
 On a :  $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 2(\vec{u}, \vec{v}) \pmod{2\pi}$



**Preuve :**

D'après la propriété précédente : On a  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) \pmod{2\pi}$

ou  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \pi + (\vec{u}, \vec{v}) \pmod{2\pi}$

et dans les deux cas :  $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 2(\vec{u}, \vec{v}) \pmod{2\pi}$

## II) LA ROTATION DANS LE PLAN

### 1) Définition :

#### 1.1 Composition de deux symétries axiales

##### Activité :

Soient  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  deux droites sécantes en  $O$  ;  $M_1 = S_{(\Delta)}(M)$  et

$M' = S_{(\Delta')}(M_1)$  et soit  $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha[2\pi]$  où  $\vec{u}$  vecteur directeur de  $(\Delta)$  et  $\vec{v}$  vecteur directeur de  $(\Delta')$

1- Quelle est l'application qui transforme  $M$  en  $M'$ .

2- Montrer que  $OM = OM'$

3- Montrer que pour tout  $M$  dans le plan la mesure :  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$  est constante.

##### Propriété :

Soient  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  deux droites sécantes en  $O$  ;  $S_{(\Delta)}$  et  $S_{(\Delta')}$  les symétries axiales d'axes respectifs  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  soit  $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha[2\pi]$  où  $\vec{u}$  vecteur directeur de  $(\Delta)$  et  $\vec{v}$  vecteur directeur de  $(\Delta')$ .

L'application  $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$  transforme le point  $M$  en  $M'$  tel que :  $OM = OM'$  et  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv 2\alpha [2\pi]$

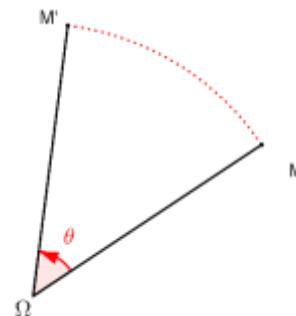
L'application  $(S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)})$  s'appelle la **rotation de centre  $O$  et d'angle  $2\alpha$**

#### 1.2 Définition de la rotation.

##### Définition :

Soit  $\Omega$  un point dans le plan et  $\theta$  un nombre réel, la **rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$**  est l'application qui transforme tout point  $M$  en  $M'$  tel que :

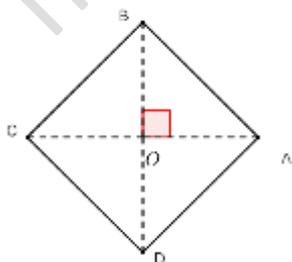
$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$



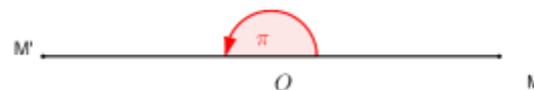
On la note par :  $R_{(\Omega, \theta)}$

**Remarque :** Si l'angle de la rotation est non nul, son centre est le **seul point invariant**.

##### Exemples :



- La symétrie centrale  $S_O$  est la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\pi$
  - L'identité  $\mathcal{I}_P$  est la rotation d'angle nul. (tous les points de  $(P)$  sont centre de cette rotation)
  - $ABCD$  un carré de centre  $O$ ,  $R$  est la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$
- On a :  $R(A) = B$  ;  $R(B) = C$  et  $R(D) = A$



## 2) Propriétés de la rotation

### 2.1 La décomposition d'une rotation

Soit  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$

①  $(\Delta)$  une droite quelconque qui passe par  $O$  et  $(\Delta')$  l'image de  $(\Delta)$  par la rotation  $r$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\alpha}{2}$ .

D'après ce qui précède  $(S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)})$  est la rotation de centre  $O$  et d'angle  $2 \times \frac{\alpha}{2}$

**Donc :  $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)} = R$ .** (figure 1)

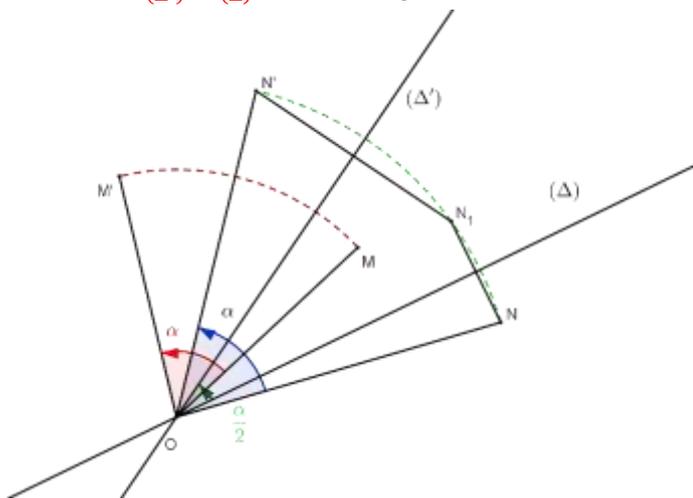


figure 1

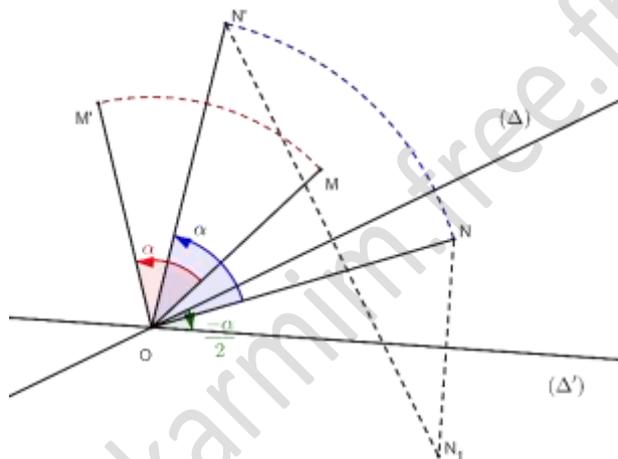


figure 2

②  $(\Delta)$  une droite quelconque qui passe par  $O$  et  $(\Delta')$  l'image de  $(\Delta)$  par la rotation  $r$  de centre  $O$  et d'angle  $-\frac{\alpha}{2}$ .

D'après ce qui précède (composition de deux symétries axiales)  $(S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')})$  est la rotation de centre  $O$  et d'angle  $2 \times \frac{\alpha}{2}$

**Donc :  $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')} = R$ .** (figure 2)

### Propriété

Soit  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$  ; la rotation  $R$  peut-être décomposée comme suite :

- $R = S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$  où  $(\Delta')$  l'image de  $(\Delta)$  par la rotation  $r$  de centre  $O$  et d'angle :  $\frac{\alpha}{2}$ .
- $R = S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$  où  $(\Delta')$  l'image de  $(\Delta)$  par la rotation  $r$  de centre  $O$  et d'angle :  $-\frac{\alpha}{2}$ .

### 2.2 Propriété d'une rotation.

Puisque toute rotation est la composition de deux symétries axiales on peut en déduire les propriétés suivantes :

- La rotation est une **isométrie (elle conserve les distances)** : si  $\begin{cases} R(A) = A' \\ R(B) = B' \end{cases} \Rightarrow A'B' = AB$
- La rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs et par suite conserve la linéarité des points
- La rotation conserve le milieu et le barycentre d'un système pondéré.
- La rotation conserve les mesures des angles géométriques
- La rotation conserve les mesures des angles orientés (les deux symétries qui composent la rotation inversent les mesures des angles orientés)

**Application :**

① Soient  $O, A, B$  et  $C$  quatre points dans le plan tels que  $OA = OB$ , construire le point  $D$  image de  $C$  par la rotation de centre  $O$  et qui transforme  $A$  puis  $B$ .

② Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points dans le plan tels que  $AC = BD$  et  $(AB) \nparallel (CD)$  ; Déterminer le centre de la rotation qui transforme  $A$  en  $B$  et  $C$  en  $D$ .

**Propriété :**

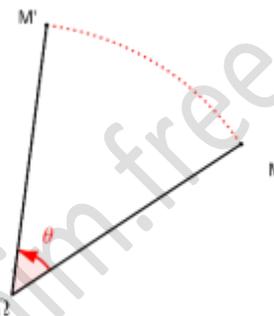
La rotation  $R_{(\Omega, \theta)}$  est une bijection et sa bijection réciproque est la bijection  $R_{(\Omega, -\theta)}$

**Preuve :**

$$R_{(\Omega, \theta)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases}$$

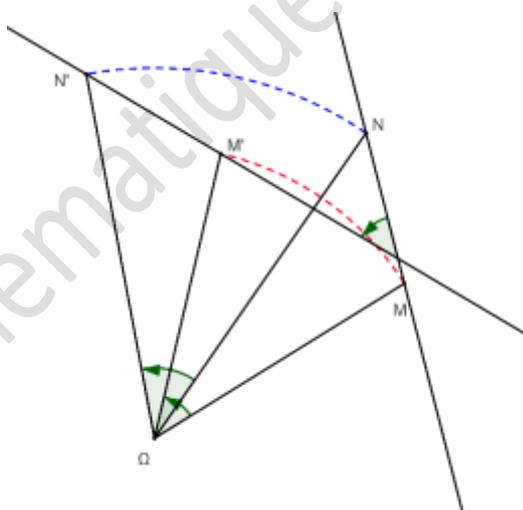
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv -\theta \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow R_{(\Omega, -\theta)}(M') = M$$



**Propriété :** (Propriété fondamentale de la rotation)

Soit  $R_{(\Omega, \theta)}$  la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$  si  $\begin{cases} R(M) = M' \\ R(N) = N' \end{cases}$  alors  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) \equiv \theta \ [2\pi]$



**Preuve :**

On a :

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) \equiv (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{\Omega M}) + (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) + (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{M'N'}) \ [2\pi]$$

$$\equiv (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \ [2\pi]$$

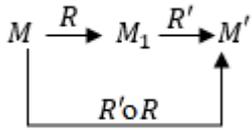
Car  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv (\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{\Omega M'}) \ [2\pi]$  (la rotation conserve la mesure des angles orientés)

D'où :  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{\Omega M}) + (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{M'N'}) \equiv 0 \ [2\pi]$ .

### III) COMPOSITION DE DEUX ROTATIONS

#### 1) Composition de deux rotations de même centre

Soient  $R_{(\Omega, \alpha)}$  et  $R'_{(\Omega, \beta)}$  deux rotations de centre  $\Omega$  ; Posons  $R(M) = M_1$  et  $R(M_1) = M'$



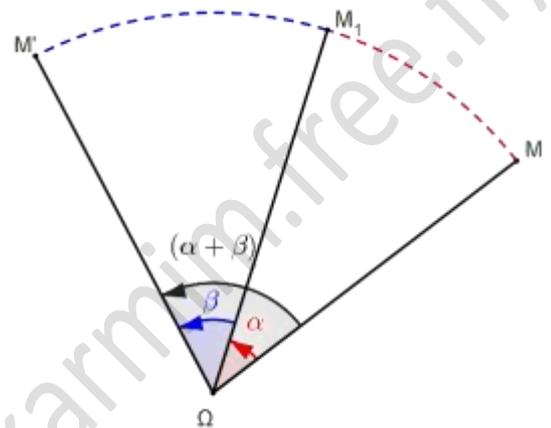
$$R(M) = M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M_1 \\ \left( \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M_1} \right) \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$R(M_1) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M_1 = \Omega M' \\ \left( \overrightarrow{\Omega M_1}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \beta \quad [2\pi] \end{cases}$$

On en déduit que :  $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left( \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \alpha + \beta \quad [2\pi] \end{cases}$

Et par suite :  $R''_{(\Omega, \alpha + \beta)}(M) = M'$  et  $(R'_{(\Omega, \beta)} \circ R_{(\Omega, \alpha)})(M) = M'$

Donc  $R'_{(\Omega, \beta)} \circ R_{(\Omega, \alpha)} = R''_{(\Omega, \alpha + \beta)}$ .



**Propriété :**

La composition de deux rotations  $R_{(\Omega, \alpha)}$  et  $R'_{(\Omega, \beta)}$  de même centre  $\Omega$  est la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $(\alpha + \beta)$  :  $R'_{(\Omega, \beta)} \circ R_{(\Omega, \alpha)} = R''_{(\Omega, \alpha + \beta)}$ .

**Remarque :**

On sait que la rotation  $R_{(\Omega, \alpha)}$  est une bijection et sa bijection réciproque est  $R'_{(\Omega, -\alpha)}$

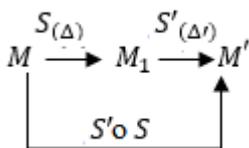
$$R'_{(\Omega, -\alpha)} \circ R_{(\Omega, \alpha)} = R''_{(\Omega, 0)} = Id_P$$

#### 2) Composition de deux rotations de centres différents.

##### 2.1 Composition de deux symétries axiales d'axes parallèles

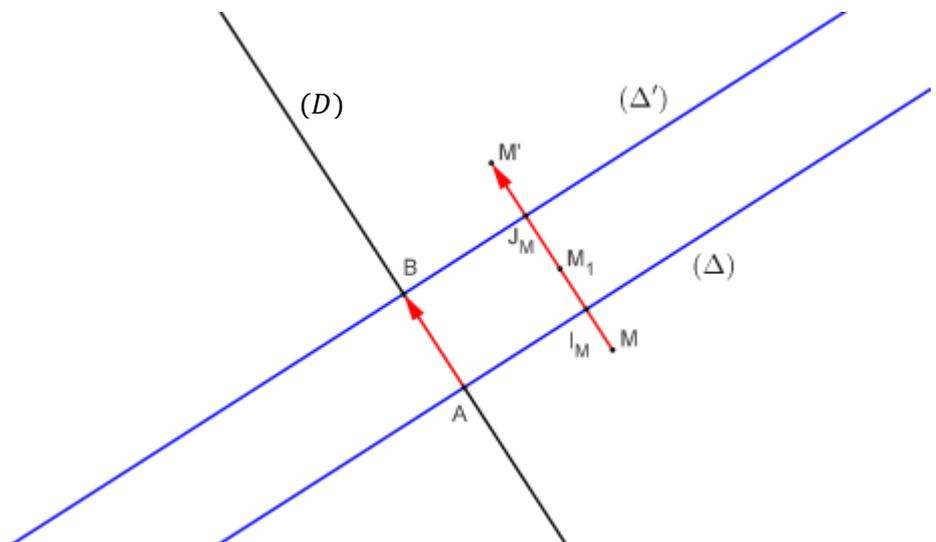
Soient  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  deux droites parallèles dans le plan.  $S_{(\Delta)}$  et  $S'_{(\Delta')}$  les symétries axiales d'axes respectifs  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$

On a :



Soit  $(D)$  une droite perpendiculaire à  $(\Delta)$

$A$  et  $B$  les intersections respectives de  $(D)$  et  $(\Delta)$  et de  $(D)$  et  $(\Delta')$



Soient  $I_M$  et  $J_M$  les milieux respectifs de  $[MM_1]$  et  $[M_1M']$ , on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} &= \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} \\ &= 2\overrightarrow{I_M M_1} + 2\overrightarrow{M_1 J_M} \\ &= 2\overrightarrow{I_M J_M} \\ &= 2\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

**Propriété :**

La composition de deux symétries axiales  $S_{(\Delta)}$  et  $S'_{(\Delta')}$  d'axes parallèles est la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$  où  $A$  et  $B$  les intersections respectives de  $(D)$  et  $(\Delta)$  et de  $(D)$  et  $(\Delta')$  avec  $(D)$  une droite perpendiculaire à  $(\Delta)$   
 si  $(\Delta) \parallel (\Delta')$  alors :  $S'_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)} = t_{\overrightarrow{AB}}$

2.2 Composition de deux rotations de centres différents.

Soient  $R_{(O,\alpha)}$  et  $R'_{(\Omega,\beta)}$  deux rotations dans le plan où  $\Omega \neq O$  on s'intéresse à la nature de la transformation  $R' \circ R$

On sait que toute rotation peut être décomposée en composée de deux symétries axiales.

Posons  $(\Delta) = (O\Omega)$

On a :  $R = S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta_1)}$  où  $(\Delta_1)$  est l'image de la droite  $(\Delta)$  par la rotation  $r_1$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{-\alpha}{2}$

D'autre part :

$R' = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta)}$  où  $(\Delta_2)$  est l'image de la droite  $(\Delta)$  par la rotation  $r_2$  de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{\beta}{2}$

D'où :

$$\begin{aligned} R' \circ R &= (S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta)}) \circ (S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta_1)}) \\ &= S_{(\Delta_2)} \circ (S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta)}) \circ S_{(\Delta_1)} \quad (\text{La composition est associative}) \\ &= S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)} \quad (S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta)} = Id_{(P)}) \end{aligned}$$

La nature de  $R' \circ R$  dépend de la position relative de  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$

❶ Si  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  se coupent en  $J$  (figure 1)

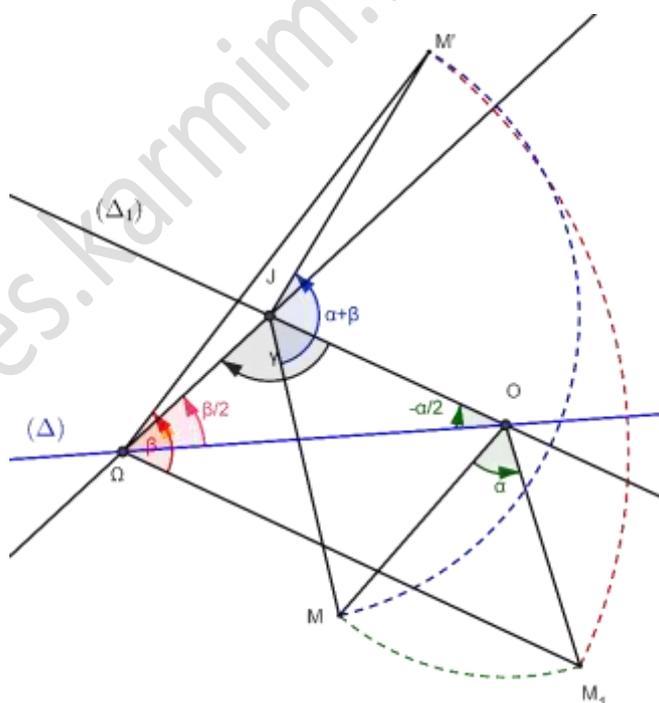
Dans ce cas  $R' \circ R = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$  est une rotation de centre  $J$  et d'angle  $2(\vec{u}, \vec{v})$  modulo  $2\pi$  où  $\vec{u}$  vecteur directeur de  $(\Delta_1)$  et  $\vec{v}$  vecteur directeur de  $(\Delta_2)$ .

Détermination de l'angle de la rotation :  $2\gamma$

On a :  $-\gamma - \frac{-\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \equiv \pi \ [2\pi]$  (lire tous les angles dans le sens trigonométrique)

d'où :  $\gamma = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - \pi \ [2\pi]$  ( $-\pi \equiv \pi[2\pi]$ )

finalement :  $2\gamma = \alpha + \beta \ [2\pi]$  ( $2\pi \equiv 0[2\pi]$ )

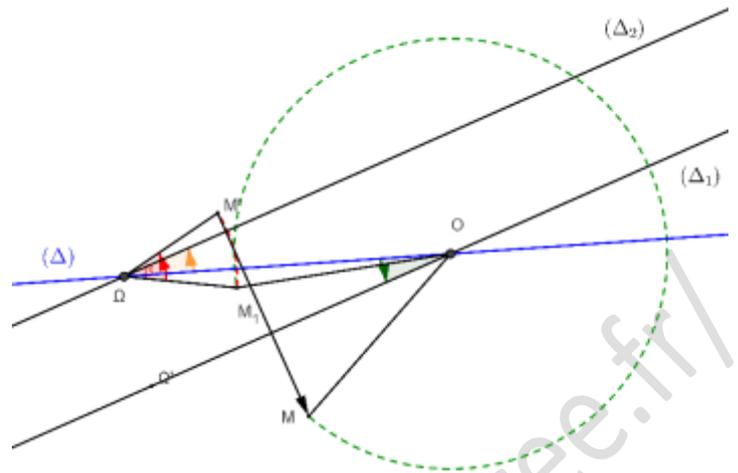


⦿ Si  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  sont parallèles (figure 2)

Dans ce cas  $R' \circ R = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$  est une translation.

Quand est ce que  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  sont parallèles ?

$$\begin{aligned}
 (\Delta) // (\Delta') &\Leftrightarrow \frac{-\alpha}{2} \equiv \frac{\beta}{2} [2\pi] \\
 &\Leftrightarrow \alpha + \beta \equiv 0 [2\pi]
 \end{aligned}$$



**Théorème :**

Soient  $R_{(O,\alpha)}$  et  $R'_{(\Omega,\beta)}$  deux rotations dans le plan où  $\Omega \neq O$

- Si  $\alpha + \beta \neq 2k\pi$  alors  $R' \circ R$  est une **rotation d'angle  $\alpha + \beta$**
- Si  $\alpha + \beta = 2k\pi$  alors  $R' \circ R$  est une **translation dans le plan.**

**Remarque :**

Pour déterminer les éléments de la rotation ou de la translation il est indispensable de maîtriser toutes les étapes de la démonstration.