# Transformations usuelles dans le plan

Remarques

Pr. Latrach ABDELKBIR

## I. Symétrie centrale- Symétrie axiale- Translation :

### 1) Rappels :

**Activité ①:**

Soient $ABCD$ un losange de centre $O$ et $I$ et $J$ les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$.

**1)** Construire une figure convenable.

**2)** **a)-** Déterminer les symétriques des points $A, B$ et $O$ par rapport à $O$.

**b)-** En déduire le symétrique de la droite $(AB)$ par rapport à $O$.

**3)** **a)-** Déterminer les symétriques des points $B, O$ et $I$ par rapport à la droite $(AC)$.

**b)-** En déduire le symétrique de la droite $(OI)$ par rapport à la droite $(AC)$.

**4)** Déterminer l'image du point $A$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

**5)** **a)-** Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

**b)-** En déduire l'image du point $B$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

**6)** Déterminer l'image du segment $[BO]$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

### 2) Définitions :

#### a) Symétrie axiale :

**Définition:**

$(D)$ est une droite dans le plan.

La ***symétrie axiale*** (ou réflexion) d'axe $(D)$ est la ***transformation plane*** qui, à tout point $M$, associe l'unique point $M'$ tel que $(D)$ soit la médiatrice du segment $[MM']$.

On dit que $M'$ est l'***image*** de $M$ par la symétrie axiale d'axe $(D)$ et on écrit: $M' = S_{(D)}(M)$.

**Remarque:**

Pour tout point $M$ de $(D)$, on a : $S_{(D)}(M) = M$.

On dit que tous les points de $(D)$ sont ***invariants*** par la symétrie axiale d'axe $(D)$.

#### b) Symétrie centrale :

**Définition:**

soit $O$ un point dans le plan.

La ***symétrie centrale*** de centre $O$ est la ***transformation plane*** qui, à tout point $M$, associe l'unique point $M'$ tel que $O$ soit le milieu du segment $[MM']$.

On dit que $M'$ est l'***image*** de $M$ par la symétrie centrale de centre $O$ et on écrit:

$$M' = S_O(M).$$

**Remarque:**

L'unique point ***invariant*** par la symétrie centrale est son centre.

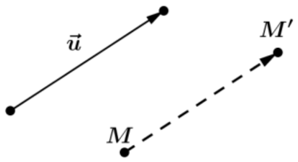
#### c) Symétrie centrale :

**Définition:**

soit $\overrightarrow{U}$ un vecteur dans le plan.

La ***translation*** de vecteur $\vec{U}$ est la ***transformation plane*** qui, à tout point $M$ , associe l'unique point $M'$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{U}$ .

On dit que $M'$ est l'***image*** de $M$ par la translation de vecteur $\vec{U}$ et on écrit : $t_{\vec{U}}(M) = M'$




## Remarques:

- Si $\vec{U} \neq \vec{0}$ , la translation $t_{\vec{U}}$ n'a aucun point invariant.
- Tous les points du plan sont invariants par la translation $t_{\vec{0}}$ .

## Application ①:

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

$ABCD$ est un quadrilatère du plan tel que $B$ est l'image de $A$ par la translation de vecteur $\vec{u}$ et $D$ est l'image de $C$ par la translation de vecteur $2\vec{u}$ .

**1)** Montrer que : $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ .

**2)** Soit $I$ le milieu du segment $[CD]$. Monter que $ABIC$ est un parallélogramme.

## Exercice ①:

$ABC$ est un triangle.

Pour tout point $M$ du plan on considère le $M'$ tel que : $\overrightarrow{MM'} - 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

Montrer que $M'$ est l'image de $M$ par une translation à préciser son vecteur.

# II. Homothétie:

## Activité ②:

Soient $OAB$ un triangle.

**1)** Construire les points $M, N$ et $P$ tels que : $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON} = -2\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$.

On a $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA}$, on dit que $M$ est l'image de $A$ par l'homothétie de centre $O$ et de rapport $k = 2$.

**2)** Que représente le point $N$ par rapport au point $B$ et le point $P$ par rapport au point $A$.

**3)** Construire le point $Q$ l'image de $B$ par l'homothétie de centre $O$ et de rapport $k = -1$.

Qu'est-ce que vous-remarquez ?

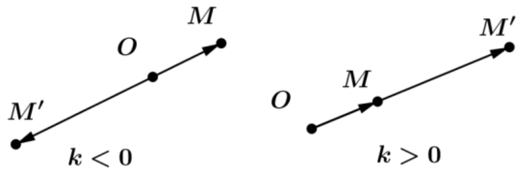
## Définition:

soit $O$ un point dans le plan et $k \in \mathbb{R}^*$.

L'***homothétie*** de centre $O$ et de rapport $k$ est la ***transformation du plan*** qui, à tout point $M$ , associe l'unique point $M'$ tel que: $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ .

On dit que $M'$ est l'***image*** de $M$ par l'homothétie de centre $O$ et de rapport $k$ et on écrit : $M' = h(M)$ .

Pr. Latrach ABDELKBIR




### Remarque:

Soit $h$ une homothétie de centre $O$ et de rapport $k$ tel que $k \in \mathbb{R}^*$ :

- Si $k = 1$, alors tous les points du plan sont invariants par $h$.
- Si $k \neq 1$, alors le point $O$ est le seul point invariant par $h$.
- Si $k = -1$, alors $h$ est la symétrie centrale de centre $O$.
- Si $|k| > 1$, alors $h$ est un ***agrandissement*** de rapport $|k|$.
- Si $|k| < 1$, alors $h$ est une ***réduction*** de rapport $|k|$.

### Application ②:

**1)** Exprimer vectoriellement la proposition suivante: $B$ est l'image de $C$ par l'homothétie $h$ de centre $A$ et de rapport $k = -\frac{3}{2}$.

**2)** Exprimer la relation vectorielle $\overrightarrow{JK} = \frac{5}{4}\overrightarrow{JL}$ par une homothétie.

**3)** Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie $h'$ qui transforme $A$ en $B$ dans les cas suivants : • $2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ • $\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

### Exercice ②:

Soient $A$ et $B$ deux points du plan $(P)$.

Soit $T$ la transformation plane qui à tout point $M$ associe le point $M'$ tel que :

$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$.

**1)** Montrer que $T$ un unique point invariant $I$. $\left(T(I) = I\right)$.

**2)** **a)**-Exprimer $\overrightarrow{IM'}$ en fonction de $\overrightarrow{IM}$.

**b)**-En déduire la nature de la transformation $T$.

## III. Propriété caractéristique de : la translation - l'homothétie :

### 1) Propriété caractéristique de la translation

### Propriété:

Soit $T$ une transformation plane.

$T$ est une translation si et seulement si pour tous points $M$ et $N$ du plan, on a :

$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ tels que $T(M) = M'$ et $T(N) = N'$.

### Conséquence:

Soient $t_{\vec{U}}$ une translation de vecteur $\vec{U}$ et $M'$ et $N'$ les images respectives de $M$ et $N$ par $t_{\vec{U}}$. On a :

- $M'N' = MN$. On dit que la translation conserve la distance.
- $(M'N') // (MN)$.

### Application ②:

Pr. Latrach ABDELKBIR

$ABC$ est un triangle et $I$ un point du segment $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

**1)** Construire $B'$ et $C'$ les images respectives de $B$ et $C$ par $t$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$.

**2)** Déterminer la nature du quadrilatère $BCC'B'$.

### 2) Propriété caractéristique de l'homothétie :

*Propriété:*

Soit $T$ une transformation plane et $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

$T$ est une homothétie de rapport $k$ si et seulement si pour tous points $M$ et $N$ du plan, on a : $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$ tels que $T(M)=M'$ et $T(N)=N'$.

*Conséquences:*

Soient $h$ une homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ et $M'$ et $N'$ les images respectives de $M$ et $N$ par $h$. On a :

- $M'N'=|k|MN$. On dit que l'homothétie ne conserve pas la distance.
- $(M'N')//(MN)$.

*Application ②:*

$ABCD$ est un trapèze tel que: $(AB)//(CD)$ et $AB=\frac{1}{3}CD$.

**1)** Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie $h$ qui transforme $A$ en $D$ et transforme $B$ en $C$.

**2)** Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie $h'$ qui transforme $A$ en $C$ et transforme $B$ en $D$.

## IV. Propriétés :

### 1) Conservation de coefficient de colinéarité de deux vecteurs :

*Propriété:*

$T$ une transformation plane et $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Soient $A, B, C$ et $D$ tels que $A \neq B$ des points du plan et $A', B', C'$ et $D'$ ses images respectives par $T$.

Si $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$.

On dit que les transformations usuelles conservent le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

*Conséquences:*

Soit $T$ une transformation plane.

- Si $A, B$ et $C$ sont trois points alignés, alors $A', B'$ et $C'$ ses images respectives par $T$ sont aussi alignés.
- Si $I$ est le milieu du segment $[AB]$ et $A', B'$ et $I'$ les images respectives par $T$ de $A, B$ et $I$, alors $I'$ est le milieu du segment $[A'B']$.

Pr. Latrach ABDELKBIR

- Les transformations conservent le parallélisme de deux droites.

### Application ②:

$ABC$ est un triangle et $I$ est le milieu de $[BC]$.

On considère les points $B'$ et $C'$ du plan définis par : $\overrightarrow{AB'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et soit $J$ le milieu de $[B'C']$.

A l'aide d'une homothétie, montrer que les points $A, I$ et $J$ sont alignés.

## 2) Conservation de la mesure d'un angle géométrique :

### Propriété:

$T$ une transformation plane.

Soient $A, B$ et $C$ des points du plan et $A', B'$ et $C'$ ses images respectives par $T$. On a :

$\widehat{BAC}=\widehat{B'A'C'}$.

On dit que les transformations usuelles conservent la mesure d'un angle géométrique.

### Conséquences:

Les transformations usuelles conservent l'orthogonalité de deux droites.

### Application ②:

$OABC$ est un rectangle.

On considère $t$ la translation de vecteur $2\overrightarrow{OC}$.

**1)** Soient $O', A', B'$ et $C'$ les images respectives de $O, A, B$ et $C$ par $t$.

Montrer que $O'A'C'B'$ est un rectangle.

**2)** On considère les points $M$ et $N$ du plan définis par : $\overrightarrow{OM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{O'N}=\frac{2}{5}\overrightarrow{O'A'}$.

Montrer que du plan $CM=C'N$.

## 3) Conservation de l'intersection de deux droites :

### Propriété:

$T$ une transformation plane.

Soient $(D)$ et $(\Delta)$ deux droites sécantes en $A$ et $(D')$ et $(\Delta')$ ses images respectives par $T$.

Les droites $(D')$ et $(\Delta')$ sont sécantes en $A'$ l'image de $A$ par $T$.

On dit que les transformations usuelles conservent l'intersection de deux droites.

### Application ②:

$ABCD$ est un parallélogramme. $I$ un point de $[BD]$ différent de $B$ et $D$.

$J$ est l'intersection de $(AI)$ et $(BC)$ et $K$ est l'intersection de $(AI)$ et $(CD)$

On considère $h$ l'homothétie de centre $I$ et transforme $B$ en $D$.

**1)** Faire une figure.

**2)** Déterminer $h(A)$ et $h(J)$.

Montrer que : $IA^2=IJ\times IK$.

Pr. Latrach ABDELKBIR

## 4) Image d'un cercle par une transformation plane :

*Propriété:*

- Soit $T$ une transformation plane différente à une homothétie.

  L'image du cercle $C(I,R)$ de centre $I$ est de rayon $R$ par $T$ est le cercle $C'(I',R)$ tel que $T(I)=I'$.
- Soit $h$ une homothétie de rapport $k$ tel que $k\in\mathbb{R}^*$.

  L'image du cercle $C(I,R)$ par $h$ est le cercle $C'(I',|k|R)$ tel que $T(I)=I'$.

*Exercice de synthèse:*

$ABCD$ est un parallélogramme et $I$ et $J$ sont deux points du plan tels que : $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$.

**1)** Construire une figure convenable.

**2)** Montrer que la droite $(BJ)$ est l'image de la droite $(AI)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

**3)** Soit $h$ l'homothétie de centre $I$ et transforme $B$ en $C$.

a) Montrer que $h((AB))=(CD)$.

b) Montrer que le rapport de $h$ est $k=-2$.

c) Soit $K$ l'image de $J$ par $h$. Montrer que : $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CK}$ .

Pr. Latrach ABDELKBIR