Transformations usuelles dans le plan

✍ Activité ①:

Soient $ABCD$ un losange de centre O et I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$.

1) Construire une figure convenable.

2) **a)-** Déterminer les symétriques des points A, B et O par rapport à O.

b)- En déduire le symétrique de la droite (AB) par rapport à O.

3) **a)-** Déterminer les symétriques des points B, O et I par rapport à la droite (AC).

b)- En déduire le symétrique de la droite (OI) par rapport à la droite (AC).

4) Déterminer l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

5) **a)-** Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

b)- En déduire l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

6) Déterminer l'image du segment $[BO]$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

✍ Application ①:

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

$ABCD$ est un quadrilatère du plan tel que B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$ et D est l'image de C par la translation de vecteur $2\vec{u}$.

1) Montrer que : $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

2) Soit I le milieu du segment $[CD]$. Monter que $ABIC$ est un parallélogramme.

✍ Exercice ①:

ABC est un triangle.

Pour tout point M du plan on considère le M' tel que :

$\overrightarrow{MM'} - 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Montrer que M' est l'image de M par une translation à préciser son vecteur.

Activité ②:

Soient OAB un triangle.

1) Construire les points M, N et P tels que :

$\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON} = -2\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$.

On a $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA}$, on dit que M est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport $k = 2$.

2) Que représente le point N par rapport au point B et le point P par rapport au point A.

3) Construire le point Q l'image de B par l'homothétie de centre O et de rapport $k = -1$. Qu'est-ce que vous-remarquez ?

✍ Application ②:

1) Exprimer vectoriellement la proposition suivante: B est l'image de C par l'homothétie h de centre A et de rapport $k = -\frac{3}{2}$.

2) Exprimer la relation vectorielle $\overrightarrow{JK} = \frac{5}{4}\overrightarrow{JL}$ par une homothétie.

3) Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h' qui transforme A en B dans les cas suivants :

- $2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

✍ Application ②:

ABC est un triangle et I un point du segment $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1) Construire B' et C' les images respectives de B et C par t la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$.

2) Déterminer la nature du quadrilatère $BCC'B'$.

✍ Application ②:

$ABCD$ est un trapèze tel que: $(AB)//(CD)$ et $AB = \frac{1}{3}CD$.

1) Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h qui transforme A en D et transforme B en C.

2) Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h' qui transforme A en C et transforme B en D.

✍ Application ②:

ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$.

On considère les points B' et C' du plan définis par :

$\overrightarrow{AB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et soit J le milieu de $[B'C']$.

A l'aide d'une homothétie, montrer que les points A, I et J sont alignés.

✍ Application ②:

$OABC$ est un rectangle.

On considère t la translation de vecteur $2\overrightarrow{OC}$.

1) Soient O', A', B' et C' les images respectives de O, A, B et C par t.

Montrer que $O'A'C'B'$ est un rectangle.

2) On considère les points M et N du plan définis par : $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{O'N} = \frac{2}{5}\overrightarrow{O'A'}$.

Montrer que du plan $CM = C'N$.

✍ Application ②:

$ABCD$ est un parallélogramme. I un point de $[BD]$ différent de B et D.

J est l'intersection de (AI) et (BC) et K est l'intersection de (AI) et (CD)

On considère h l'homothétie de centre I et transforme B en D.

1) Faire une figure.

2) Déterminer $h(A)$ et $h(J)$.

Montrer que : $IA^2 = IJ \times IK$.

Devoir maison N°3 S III

Exercice 1

Soit ABC un triangle tel que : $AB = 3$ et $AC = 1$ et $\cos(BAC) = \frac{-1}{3}$.

1) Vérifier que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -1$.

2) Calculer la distance BC.

3) Soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AC]$.

a/- Calculer AI et BJ.

b/- Calculer $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$.

4) Soit E un point du plan tel que : $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$.

a/- Ecrire le vecteur $\overrightarrow{IE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b/- Montrer que les droites (AB) et (IE) sont perpendiculaires.

Exercice 2

ABC est un triangle isocèle et rectangle en B tel que : $AB = \sqrt{2}$.

Soit D un point du plan En dehors du triangle tel que le triangle ABD est équilatérale.

1) Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$.

2) Calculer la distance CD.

3) Montrer que : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = 1 - \sqrt{3}$.

4) Vérifier que $\widehat{DAC} = \frac{7\pi}{12}$ en déduire que $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Exercice 2

$ABCD$ est un parallélogramme et I et J sont deux points du plan tels que : $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC}$.

1) Construire une figure convenable.

2) Montrer que la droite (BJ) est l'image de la droite (AI) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3) Soit h l'homothétie de centre I et transforme B en C.

a) Montrer que $h((AB)) = (CD)$.

b) Montrer que le rapport de h est $k = -2$.

Soit K l'image de J par h. Montrer que : $\overrightarrow{KI} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CK}$.

Pr. LATRACH Abdelkbir