I. Vecteurs de l'espace :

01. Prolongement de la notion d'un vecteur dans le plan à l'espace :

a. notion de vecteur dans l'espace $(\mathcal{E})$:

dans le plan un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- Direction de $\overrightarrow{AB}$: c'est la droite (AB).
- Sens de $\overrightarrow{AB}$: c'st le sens de A vers B .
- La norme de $\overrightarrow{AB}$ (ou la longueur de $\overrightarrow{AB}$) .est la distance AB on note : $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.
- Cette notion sera prolongée à l'espace $(\mathcal{E})$ et ainsi toutes les propriétés des vecteurs dans le plan sont valables dans chaque plan de l'espace $(\mathcal{E})$.

b. Exemple :

- I est le milieu de $[AB]$ est équivaut à $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.
- Soient A et B et C trois points non alignés de l'espace $(\mathcal{E})$ donc A et B et C détermine un plan et un seul noté (ABC) .
- Dans le plan (ABC) , on considère le triangle non aplati EFG ; I et J sont respectivement les milieux de $[EF]$ et $[EG]$ donc on peut déduire que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$ et aussi les droites $(IJ) \| (FG)$.

c. Remarque :

- Le cas $A = B$ le vecteur $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (le vecteur nul) n'a pas de direction et de sens et sa norme est nulle.
- On dit que deux vecteurs sont égaux si ils ont des directions parallèles et même sens et même norme.
- Un quadrilatère $ABCD$ dans l'espace $(\mathcal{E})$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

02. Calculs vectoriels dans l'espace :

a. Remarque :

La somme de deux vecteurs et le produit d'un vecteur par un réel sont définis de la même manière que dans la géométrie plane et on a les mêmes propriétés.

Par exemple :

- $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.
- Relation de Chasles $\forall A,B,C \in (\mathcal{E}) : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- L'opposé du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur qui a même direction et même norme mais sens opposé du sens $\vec{u}$ et on note $-\vec{u}$.
- Le vecteur $\vec{v} = k\vec{u}$:
  - $\vec{v} = k\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$.
  - $\vec{v} = k\vec{u}$ a le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$. $\vec{v} = k\vec{u}$ a le sens opposé que $\vec{u}$ si $k < 0$.

Michel Chasles
(1793 - 1880)

- La norme de $\vec{v} = k\vec{u}$ vérifie $\|\vec{v}\| = |k|\|\vec{u}\|$.

➢ Pour tout vecteur $\vec{u}$ on pose $0.\vec{u} = \vec{0}$.

➢ Pour tout $k \in \mathbb{R}$ on a $k.\vec{0} = \vec{0}$.

d. Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace $(\mathcal{E})$ et pour tous réels k et k' on a :

1. $(k+k').\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.
2. $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
3. $k(k'.\vec{u}) = k'(k\vec{u}) = (k \times k')\vec{u}$.
4. $1.\vec{u} = \vec{u}$.
5. $k.\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow (k = 0 \text{ et } \vec{u} = \vec{0})$.

II. Colinéarité de deux vecteurs – définition vectoriel d'une droite dans l'espace $(\mathcal{E})$.

01. Colinéarité de deux vecteurs – Colinéarité de trois points :

a. Définition :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un α de $\mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.
(c.à.d. l'un des deux vecteurs s'écrit en fonction de l'autre) .

b. Remarque :

➢ Le vecteur nul est colinéaire avec tous les vecteurs de l'espace .

➢ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si $(AB) \parallel (CD)$.

➢ A et B et C trois points de l'espace $(\mathcal{E})$ sont alignés si et seulement si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

02. Définition vectoriel d'une droite dans l'espace $(\mathcal{E})$:

a. Définition et propriété :

Soient A et B deux points distincts de l'espace $(\mathcal{E})$.

➢ Tout vecteur non nul $\vec{u}$ de l'espace $(\mathcal{E})$ colinéaire avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé vecteur directeur de la droite (AB).

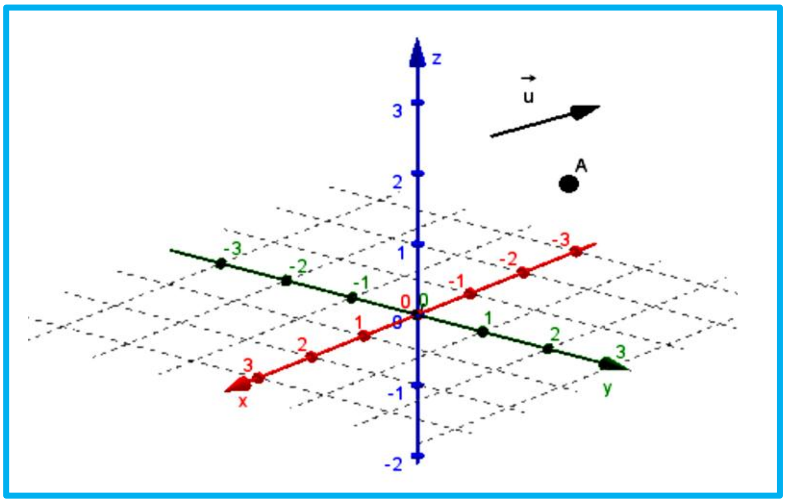
➢ L'ensemble des points M de l'espace $(\mathcal{E})$ qui vérifient $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$ tel que α de $\mathbb{R}$ est la droite (D) qui passe par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$, on note $D(A,\vec{u})$

d'où : $D(A,\vec{u}) = \{M \in (\mathcal{E}) / \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} \ ; \ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

b. Exemple :

Soit A un point et $\vec{u}$ est un vecteur non nul de l'espace $(\mathscr{E})$ (voir figure ci contre) .

Construire la droite $D(A,\vec{u})$.



III. Vecteurs coplanaires – détermination vectoriel d'un plan dans l'espace :

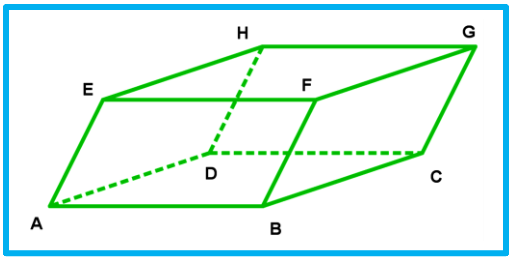
01. Vecteurs coplanaires :

a. Définition et théorème :

- Quatre points A et B et C et D de l'espace $(\mathscr{E})$ sont coplanaires si et seulement si les quatre points appartiennent au même plan .
- Trois vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace $(\mathscr{E})$ sont coplanaires si et seulement s'il existe quatre points A et B et C et D coplanaires tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$.

b. Exemple :

ABCDEFGH est parallélépipède trouver 3 vecteurs coplanaires puis 3 vecteurs non coplanaires .



Correction :

- On considère les vecteurs : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{DG}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{DH}$.

On a : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{DG}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{DH}$ et on sait que les points D et C et G et H sont coplanaires d'où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires .

- les vecteurs : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires .

c. Remarque :

- Si parmi les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deus vecteurs sont colinéaires alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires .
- Si trois vecteurs sont constitués par cinq points on ne peut pas confirmer que les cinq points sont coplanaires .Exemple $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires car $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires mais les points A et B et D et E et F sont non coplanaires car le point D n'appartient pas au plan déterminé par A et B et E et F .

02. Détermination vectoriel d'un plan dans l'espace :

a. Définition et théorème :

- Tout plan de l'espace $(\mathscr{E})$ est déterminé par un point donné de l'espace $(\mathscr{E})$ et de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non coplanaires de $(\mathscr{E})$.
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont appelés vecteurs directeurs du plan , ce plan sera noté $(P)=P(A,\vec{u},\vec{v})$.
- L'ensemble des points M de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifient $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$ tel que x et y de $\mathbb{R}$ est le plan (P) qui passe par le point A et orienter par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on note $P(A,\vec{u},\vec{v})$
- d'où : $P(A,\vec{u},\vec{v})=\left\{M\in(\mathscr{E})\,/\,\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}\ ;\ x \text{ et } y\in\mathbb{R}\right\}$.

b. Remarque :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si l'un des trois vecteurs s'écrit en fonction des deux autres .
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\exists x,y\in\mathbb{R}\ /\ \vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

Exemple :

- $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}$ ($\overrightarrow{AB}$ s'écrit en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BD}$)
- $\overrightarrow{BC}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BD}$ ($\overrightarrow{BC}$ s'écrit en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$)

- Le vecteur nul est coplanaire avec deux autres vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$.

c. Exercice :

On considère les points les points A et B et C et D et E de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que :

(1) : $2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{EB}-5\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{ED}=\vec{0}$.

1. Montrer que : les points A et B et C et D sont coplanaires .

Correction :

On a :

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{EB}-5\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{ED}=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{EA}+4\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}\right)-5\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}\right)-\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

D'où : $\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}$ donc le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est écrit en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Donc les vecteurs : $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires .

D'où : les points A et B et C et D sont coplanaires.

Conclusion : les points A et B et C et D sont coplanaires .

IV. Parallélisme dans l'espace :

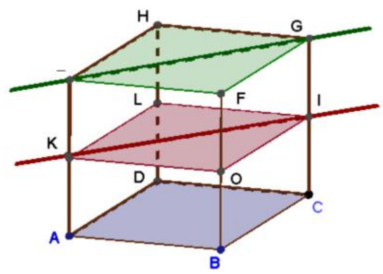
01. Parallélisme des droites dans l'espace $(\mathcal{E})$:

a. Définition :

$D(A,\vec{u})$ et $\Delta(B,\vec{v})$ sont deux droites de l'espace $(\mathcal{E})$.

$\Delta(B,\vec{v}) \parallel D(A,\vec{u}) \Leftrightarrow$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires) ou encore $\Delta(B,\vec{v}) \parallel D(A,\vec{u}) \Leftrightarrow \vec{v} = \alpha\vec{u}$; $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

b. Exemple :



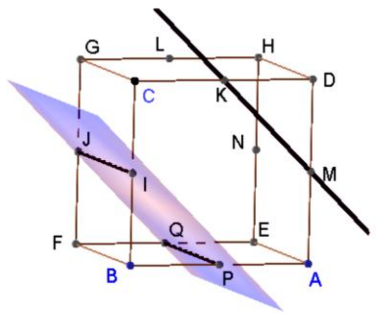
02. Parallélisme d'une droite et d'un plan de l'espace $(\mathcal{E})$:

a. Définition :

$D(A,\vec{u})$ et $P(B,\vec{v},\vec{w})$ sont une droite et un plan de l'espace $(\mathcal{E})$.

la droite $D(A,\vec{u})$ est parallèle au plan $P(B,\vec{v},\vec{w})$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ou encore $D(A,\vec{u}) \parallel P(B,\vec{v},\vec{w}) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$ / $x , y \in \mathbb{R}$.

b. Exemple :



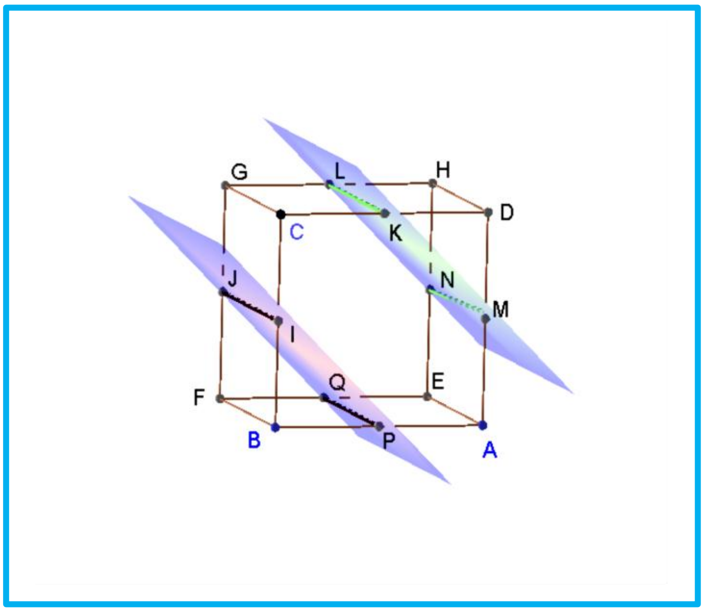
03. Parallélisme de deux plans dans l'espace $(\mathscr{E})$:

a. Définition :

$P\left(B,\vec{v},\vec{w}\right)$ et $Q\left(B,\vec{u_1},\vec{v_1}\right)$ sont deux plans parallèles dans l'espace $(\mathscr{E})$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{u_1}$ et $\vec{v_1}$ sont coplanaires ou encore.

$$P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right) \parallel Q\left(B,\vec{u_1},\vec{v_1}\right) \Leftrightarrow \left(\vec{u_1} = x\vec{v}+y\vec{w} \;/\; x , y \in \mathbb{R} \text{ et } \vec{u_2} = x'\vec{v}+y'\vec{w}/ \; x' , y' \in \mathbb{R}\right)$$

b. Exemple :



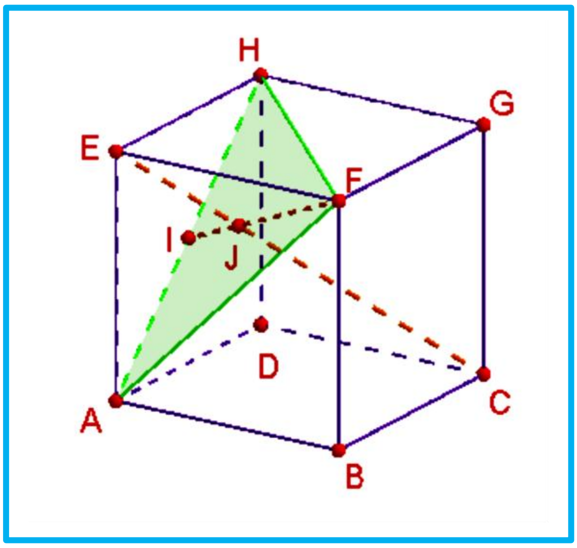
04. Exercice :

On considère un cube $ABCDEFGH$, tel que I est le milieu de $[AH]$ et J est un point de $[FI]$ tel que : $\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FI}$.

1. Construire la figure .
2. Montrer que : $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.
3. Montrer que : $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.
4. Que peut-on conclure pour les points E et J et C .

Correction :

1. On construit une figure :



2. **Montrons que :** $\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$:

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EC}&=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\&=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\ ;\ \left(\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\right)\end{aligned}$$

Conclusion : $\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

3. **Montrons que :** $\overrightarrow{EJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$:

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EJ}&=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FJ}\\&=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{FI}\\&=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AI}\right)\\&=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\right)\\&=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}\right)\right)\\&=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right)\\&=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{FE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}\\&=\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\quad\left(\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AD}\right)\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\\&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}\right)\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}\ ;\ \left(\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\end{aligned}$$

Conclusion : $\overrightarrow{EJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.

4. **Déduction pour les points E et J et C :**

Puisque $\overrightarrow{EJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ **donc les vecteurs** $\overrightarrow{EJ}$ **et** $\overrightarrow{EC}$ **sont colinéaires par suite les points E et J et C sont colinéaires.**

Conclusion : les points E et J et C sont colinéaires.