Exercices d'applications et de réflexions *sur L'ARITHMETIQUE*
Exercices avec solutions

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC Sciences maths

L'ARITHMETIQUE

Exercice1 : montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$;
1) $(3n+1)\wedge(7n+2)=1$, 2) $(5n+3)\wedge(2n+1)=1$
3) $(n+2)\wedge(n^2+2n-1)=1$

Solution : 1)
on a **:** $7(3n+1)-3(7n+2)=1$
Donc : $\exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que
$u(3n+1)+v(7n+2)=1$ $u=7$ et $v=-3$
Donc d'après le théorème de Bézout on a :
$(3n+1)\wedge(7n+2)=1$
2) $(5n+3)\wedge(2n+1)=1$
Car : $2\times(5n+3)+(-5)\times(2n+1)=1$
3) $(n+2)\wedge(n^2+2n-1)=1$
Car $n\times(n+2)+(-1)\times(n^2+2n-1)=1$

Exercice2 : Montrons que : $360\wedge 84=12$ et déterminer u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que :
$360u+84v=12$

Solution : on a : $360=2^3.3^2.5$ et $84=2^2.3.7$
Donc $360\wedge 84=2^2.3=12$
D'autre part : $360=84\times 4+24$ donc :
$24=a-(b\times 4)$
On a : $84=24\times 3+12$
Donc : $b-(a-(b\times 4))\times 3=12$
On a : $24=12\times 2+0$
Donc : $-3a+13b=12$

Exercice3 : Considérons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $17x+36y=1$ et déterminons une solution particulière de (E).

Solution : On a $17\wedge 36=1$ donc d'après le théorème de $Bézout$; il existe u et v tels que : $17u+36v=1$ donc (E) admet une solution.
On pose $a=36$ et $b=17$ on obtient :
$a=2b+2$ et $b=8\times 2+1$
Donc : $2=a-2b$ et $b=8\times(a-2b)+1$
D'où : $-8a+17b=1$
Donc le couple $(-8,17)$ est une solution de l'équation (E).

Exercice4 : résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : (E) $7(x-2)=3(y+1)$

Solution : $7(x-2)=3(y+1)\Leftrightarrow 7/3(y+1)$
Or on sait que : $7\wedge 3=1$
Donc d'après le théorème de Gauss : $7/y+1$
Donc $\exists k\in\mathbb{Z}/\ y+1=7k\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ y=7k-1$

$$(E)\Leftrightarrow\begin{cases}7(x-2)=3(y+1)\\ \exists k\in\mathbb{Z}/\ y=7k-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7(x-2)=3\times 7k\\ \exists k\in\mathbb{Z}/\ y=7k-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=3k\\ \exists k\in\mathbb{Z}/\ y=7k-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3k+2\\ \exists k\in\mathbb{Z}/\ y=7k-1\end{cases}$$

Donc $S=\{(3k+2;7k-1)/\ k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice5 : déterminer l'entier naturel n tel que : $\dfrac{n(n^2+3n-2)}{n+1}\in\mathbb{N}$

Solution : 1) 2) $\dfrac{n(n^2+3n-2)}{n+1}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n+1/n(n^2+3n-2)$
or on a : $1=(n+1)\wedge n$ car $(n+1)-n=1$ (bezout)
Donc : $n+1/n^2+8n-2$
La division euclidienne de n^2+3n-2 par $n+1$
Donne : $n^2+3n-2=(n+1)(n+2)-4$
$n+1/n^2+3n-2$ et $n+1/n+1\Rightarrow n+1/n^2+3n-2-(n+1)(n+2)$
$\Rightarrow n+1/-4\Rightarrow n+1/4$
Il faut que $n+1\in\{1;2;4\}$ ce qui entraine :
$n\in\{0;1;3\}$
Inversement : On vérifie que 0 ;1 ;3 vérifient
$\dfrac{n(n^2+3n-2)}{n+1}\in\mathbb{N}$ Avant de conclure que :
$\dfrac{n(n^2+3n-2)}{n+1}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n\in\{0;1;3\}$

Exercice6: 1)Montrer que : $\forall a\in\mathbb{Z}^*$ et $\forall b\in\mathbb{Z}^*$

on a : $a\wedge b=1\Rightarrow\begin{cases}a\wedge(a+b)=1\\ b\wedge(a+b)=1\\ a\wedge b(a+b)=1\\ (a+b)\wedge ab=1\end{cases}$

Solution: on pose $d=a\wedge(a+b)$
montrons que : $d=1$
$d=a\wedge b\Rightarrow d/a$ et $d/a+b\Rightarrow d/a$ et $d/a+b-a$

$\Rightarrow \Rightarrow d/a$ et $d/b \Rightarrow d/b\wedge a \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$

ce qui entraine: $1=a\wedge(a+b)$(1)

de même on montre que : $1=b\wedge(a+b)$(2)

de (1) et (2) en déduit que **:** $(a+b)\wedge ab=1$

D'après une proposition

Et on a $a\wedge(a+b)=1$et $a\wedge b=1$ donc

$a\wedge b(a+b)=1$ D'après la même proposition

Exercice7 :

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$

$(2n+5)\wedge(n^2+5n+6)=1$

Solution :on a **:** $n^2+5n+6=(n+2)(n+3)$

Et on a : $(2n+5)-2(n+2)=1$

Donc d'après le théorème de Bézout

$(n+2)\wedge(2n+5)=1$ (1)

De même : on a : $2(n+3)-(2n+5)=1$

Donc d'après le théorème de Bézout

$(n+3)\wedge(2n+5)=1$ (2)

de (1) et (2) en déduit que

$(2n+5)\wedge((n+3)(n+2))=1$

Donc : $(2n+5)\wedge(n^2+5n+6)=1$

Exercice8 : Considérons l'équation :

(E): 756x − 245y = 14

1- Montrer l'équation (E) admet une solution.

2- Déterminer une solution particulière de (E)

3- Résoudre l'équation (E)

Solution : 756 = $2^2 \times 3^3 \times 7$ et 245 = 5×7^2

1) On a : 756 ∧ 245 = 7 et 7|14 donc l'équation (E) admet une solution dans $\mathbb{Z}^2$

2- En utilisant l'algorithme d'Euclide on obtient :

a = 756 et b = 245

a = 3 × b + 21

b = 11 × 21 + 14

21 = 14 + 7

On a donc :21 = a − 3b

b = 11 × (a − 3b) + 14 ⟺ 14 = 34b − 11a

7 = (a − 3b) − (34b − 11a) ⟺ 7 = 12a − 37b

Finalement :14 = 24a − 74b et donc le couple (24,74) est une solution particulière de (E)

D'où : $S=\left\{\left(24-\frac{245}{7}k;74-\frac{756}{7}k\right);k\in\mathbb{Z}\right\}$

$S=\{(24-35k;74-108k);k\in\mathbb{Z}\}$

$S=\{(24+35k;74+108k);k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice9 : déterminer dans $\mathbb{N}^2$ les couples

$(x;y)/\begin{cases}x+y=48\\x\wedge y=4\end{cases}$ avec $x\le y$

Solution : $\begin{cases}x+y=48\\x\wedge y=4\end{cases}\Leftrightarrow \exists(x';y')\in\mathbb{N}^2/\begin{cases}x=4x'\\y=4y'\\x+y=48\end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists(x';y')\in\mathbb{N}^2/4x'+4y'=48$

$\Leftrightarrow \exists(x';y')\in\mathbb{N}^2/x'+y'=12$

On Dresse une table comme suit :

x'	0	1	2	3	4	5	6
y'	12	11	10	9	8	7	6
x	0	4	8	12	16	20	24
y	48	44	40	36	32	28	24

Donc :

$S=\{(0;48);(4;44);(8;40);(12;36);(16;32);(20;28);(24;24)\}$

Exercice10: résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant: $\begin{cases}2x\equiv3[7]\\3x\equiv1[5]\end{cases}$

Solution:

$\begin{cases}2x\equiv3[7]\\3x\equiv1[5]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\equiv-4[7]\\3x\equiv1[5]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\equiv-2[7]\\3x\equiv1[5]\end{cases}$

Car $2\wedge7=1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\equiv5[7]\\3x\equiv1[5]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5+7k;k\in\mathbb{Z}\\3x\equiv1[5]\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5+7k;k\in\mathbb{Z}\\3(5+7k)\equiv1[5]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5+7k;k\in\mathbb{Z}\\k\equiv1[5]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5+7k;k\in\mathbb{Z}\\k\equiv1+5k'\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=5+7(1+5k');k'\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=35k'+12;k'\in\mathbb{Z}$

$S=\{35k'+12;k'\in\mathbb{Z}\}$

Exercice11: montrer que l'ensemble des solutions du système suivant est non vide :

$\begin{cases}n\equiv2[11]\\n\equiv3[7]\end{cases}$

Solution : $\begin{cases}n\equiv2[11]\\n\equiv3[7]\end{cases}\Leftrightarrow\exists(x;y)\in\mathbb{Z}^2/\begin{cases}n=11x+2\\n=7y+3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\exists(x;y)\in\mathbb{Z}^2/11x+2=7y+3$

$\Leftrightarrow\exists(x;y)\in\mathbb{Z}^2/11x-7y=1$

Or on sait que : $7\wedge11=1$

Donc d'après le théorème de Bézout :

$\exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2/11u+7v=1$

Donc il suffit de prendre : $\begin{cases}x=u\\y=-v\end{cases}$

Donc $\exists(x;y)\in\mathbb{Z}^2/\begin{cases}n=11x+2\\n=7y+3\end{cases}$

Par suite : l'ensemble des solutions du système est non vide

Exercice12: résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante: $(E) \quad 5x-3y=1$

Solution : On a : $5\times2-3\times3=1$ donc $(2;3)$ est une solution particulière de l'équation

Donc : $5x-3y=5\times2-3\times3$

Donc : $5(x-2)=3(y-3) \Rightarrow 5/3(y-3)$

Or on sait que : $5\wedge3=1$

Donc d'après le théorème de Gauss : $5/y-3$

Donc $\exists k\in\mathbb{Z} / y-3=5k \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} / y=5k+3$

$$(E)\Leftrightarrow\begin{cases}5(x-2)=3(y-3)\\ \exists k\in\mathbb{Z} / y=5k+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5(x-2)=3\times5k\\ \exists k\in\mathbb{Z} / y=5k+3\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-2=3k\\ \exists k\in\mathbb{Z} / y=5k+3\end{cases}\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} / \begin{cases}x=3k+2\\ y=5k+3\end{cases}$$

Donc $S=\{(3k+2;5k+3) / k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice13 : Montrons que : ($\forall n \geq 2$) : $n^5\equiv n[30]$

Solution : On a : d'après le petit théorème de Fermat : $n^5\equiv n[5]$ Donc : $5/n^5-n$

D'autre part : $n^5-n=n(n^4-1)=n\left(\left(n^2\right)^2-1\right)$

$n^5-n=n(n^4-1)=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$

Donc $2|n(n-1)$ et $3|(n-1)n(n+1)$ et puisque 2 et 3 sont premiers alors 6 = (2 × 3) divise n^5-n

Finalement :

$$\begin{cases}5/n^5-n\\ 6/n^5-n \Rightarrow 30=6\times5/n^5-n\\ 6\wedge5=1\end{cases}$$

Donc : $n^5\equiv n[30]$

Exercice14 :

1) Montrer pour tout entier naturel n, non nul : n^3-n est divisible par 3.

2) Soit p un nombre premier différent de 2, démontrer que $N=\sum_{k=0}^{p-2}2^k$ est divisible par p .

Solution :

1. Le corollaire du théorème de Fermat affirme : Pour tout entier naturel a et tout nombre premier p , on a: $a^p\equiv a[p]$

Donc $a^p-a\equiv0[p]$, c'est à dire a^p-a est divisible par p .

$n\in\mathbb{N}^*$et 3 est un nombre premier

donc n^3-n est divisible par 3.

Remarques : on peut aussi justifier par une factorisation ou un raisonnement par récurrence.

2) $N=2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{p-2}$

est la somme des (p−1) premiers termes de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $2^0=1$

Donc: $N=\dfrac{1-2^{p-1}}{1-2}=2^{p-1}-1$

p est un nombre premier différent de 2 donc p est premier avec 2.

On utilise le théorème de Fermat: 2^{p-1}est divisible par p

Par suite : N est divisible par p.

Exercice15 : Le corollaire du théorème de Fermat affirme :

Pour tout entier naturel a et tout nombre Premier p, on a: $a^p\equiv a[p]$

La réciproque est-elle vraie ?

C'est à dire si pour tout entier naturel a , on a $a^p\equiv a[p]$ (avec p entier naturel supérieur ou égal à 2) alors a-t-on p premier ?

On se propose de donner un contre-exemple.

1. Décomposer 561 en produit de facteurs premiers.

2. Démontrer que si x est un entier alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, (x^n-1) est un multiple de $(x-1)$

3. Démontrer que $a^{561}-a$ est divisible par 3 puis par 11, puis par 17.

4. En déduire que pour tout entier naturel a : $a^{561}-a\equiv0[561]$

Solution :

1) $561=3\times11\times17$

2) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)$

Si x est un entier alors :

$x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1$ est un entier et $x-1$ est un entier.

Conséquence : (x^n-1) est un multiple de $(x-1)$

Remarque : on peut aussi effectuer un raisonnement par récurrence pour justifier le résultat)

3) $a^{561}-a=a(a^{560}-1)$

On considère la décomposition de 560 en produit de facteurs premiers :$560=2^4\times5\times7$

560 a donc 5×2×2=20 diviseurs de 560

D_{560}={1;2;4;5;7;8;10;14;16;20;28;35;40;56;70;80; 140;280;560}

560=2×280 donc : $a^{560}=\left(a^2\right)^{280}$

On pose $x=a^2$ et n=280

$a^{560}-1$est un multiple de a^2-1. Donc il existe $K\in\mathbb{N}$ tel que: $a^{560}-1=(a^2-1)K$

Par suite, $a^{561}-a=a(a^{560}-1)$

$a^{561}-a=a(a^2-1)K$

$a^{561}-a=(a^3-a)K$

Or a^3-a est divisible par 3

Donc, $a^{561}-a$ est divisible par 3

a560=$(a^{10})^{56}$ On pose $x=a^{10}$ et n=56

$a^{560}-1$ est un multiple de $a^{10}-1$.
Donc il existe K ' ∈ℕ tel que: $a^{560}-1=(a^{10}-1)K'$
Par suite,$a^{561}-a=a(a^{560}-1)$
$a^{561}-a=a(a^{10}-1)K'$
$a^{561}-a=(a^{11}-a)K'$
Or $a^{11}-a$ est divisible par 11
Donc, $a^{561}-a$ est divisible par 11
$a^{560}=(a^{16})^{35}$
On pose $x=a^{16}$ et n=35
$a^{560}-1$ est un multiple de $a^{16}-1$.
Donc il existe K ''∈ℕ tel que :
$a^{560}-1=(a^{16}-1)K''$
Par suite $a^{561}-a=a(a^{560}-1)$
$a^{561}-a=a(a^{16}-1)K''$
$a^{561}-a=(a^{17}-a)K''$
Or $a^{17}-a$ est divisible par 17
Donc, $a^{561}-a$ est divisible par 17
4) 3; 11 et 17 sont trois nombres premiers donc premiers entre eux 2 à 2.
$a^{561}-a$ est divisible par 3; 11 et 17.
Donc $a^{561}-a$ est divisible par 3×11×17=561
Par suite: $a^{561}-a\equiv 0[561]$
$a^{561}\equiv a[561]$ et pourtant 561 n'est pas un nombre premier.
Donc la réciproque du corollaire du théorème de Fermat n'est pas vraie.

Exercice 16:soit p un nombre premier positif et $a\in\mathbb{N}^*$et $p\wedge a=1$ on pose $F_p(a)=\dfrac{a^{p-1}-1}{p}$

1)verifier que : $F_p(a)\in\mathbb{N}$

2) soit $b\in\mathbb{N}^*$ tel que : $p\wedge b=1$
Démontrer que : $F_p(ab)\equiv F_p(a)+F_p(b)[p]$

Solution :1)on a **:** $p\wedge a=1$ et p un nombre premier donc : d'après le théorème de Fermat :
$a^{p-1}-1\equiv 0[p]$ donc : $p / a^{p-1}-1$
Donc : $F_p(a)\in\mathbb{N}$
2) d'après le théorème de Fermat :
$a^{p-1}-1\equiv 0[p]$ et $b^{p-1}-1\equiv 0[p]$
Donc : $(a^{p-1}-1)(b^{p-1}-1)\equiv 0[p^2]$
Donc : $(ab)^{p-1}-a^{p-1}-b^{p-1}+1\equiv 0[p^2]$
Donc : $(ab)^{p-1}-1\equiv(a^{p-1}-1)+(b^{p-1}-1)[p^2]$
Donc : $\dfrac{(ab)^{p-1}-1}{p}\equiv\dfrac{a^{p-1}-1}{p}+\dfrac{b^{p-1}-1}{p}[p]$
Donc : $F_p(ab)\equiv F_p(a)+F_p(b)[p]$

Exercice17 :soit $n\in\mathbb{Z}$ on pose :
$u_n=5n^7+7n^5+23n$

1) Démontrer que : $u_n\equiv 0[5]$
2) Démontrer que : $u_n\equiv 0[7]$
3)en déduire que : $\dfrac{n^7}{7}+\dfrac{n^5}{5}+\dfrac{23n}{35}\in\mathbb{Z}$

Solution :1)
on a **:** 5est un nombre premier donc : d'après le théorème de Fermat : $n^5\equiv n[5]$
et on a **:** $5n^7\equiv 0[5]$ et $7n^5\equiv 7n\equiv 2n[5]$
et $23n\equiv 3n[5]$
donc : $u_n=5n^7+7n^5+23n\equiv 0[5]$
2) on a **:** 7 est un nombre premier donc : d'après le théorème de Fermat : $n^7\equiv n[7]$
et on a **:** $5n^7\equiv 5n[7]$ et $7n^5\equiv 0[7]$
et $23n\equiv 2n[7]$ donc $u_n\equiv 7n[5]$
donc : $u_n\equiv 0[7]$
3)on a : $5/u_n$ et $7/u_n$ et $5\wedge 7=1$
Donc : $5\times 7/u_n$ cad $35/u_n$
Donc : $\dfrac{u_n}{35}\in\mathbb{Z}$ donc : $\dfrac{5n^7+7n^5+23n}{35}\in\mathbb{Z}$
donc : $\dfrac{n^7}{7}+\dfrac{n^5}{5}+\dfrac{23n}{35}\in\mathbb{Z}$

Exercice18 : Considérons dans ℤ² l'équation (E): $x^4+781=3y^4$
1)monter que : $\forall x\in\mathbb{Z}$: $x^4\equiv 1[5]$ou $x^4\equiv 0[5]$
2) monter que : $\forall x\in\mathbb{Z}$: $x^4+781\equiv 2[5]$
Ou $x^4+781\equiv 1[5]$
3) en déduire les solutions de l'équation(E)

Solution : 1)on a **:** 5 est un nombre premier donc : a)si 5 ne divise pas x alors :d'après le théorème de Fermat : $x^4\equiv 1[5]$
b)si 5 divise x alors :d'après le théorème de Fermat : $x^4\equiv 0[5]$
donc : $\forall x\in\mathbb{Z}$: $x^4\equiv 1[5]$ou $x^4\equiv 0[5]$
2) on a : $\forall x\in\mathbb{Z}$: $x^4\equiv 1[5]$ou $x^4\equiv 0[5]$
Donc : $\forall x\in\mathbb{Z}$: $x^4+781\equiv 2[5]$ou $x^4+781\equiv 1[5]$
3)on a : $\forall y\in\mathbb{Z}$: $y^4\equiv 1[5]$ou $y^4\equiv 0[5]$
Donc : $3y^4\equiv 0[5]$ou $3y^4\equiv 3[5]$
Mais on a :

$\forall x\in\mathbb{Z}$: $\begin{cases} x^4+781\equiv 1[5] \\ 3y^4\equiv 0[5]\end{cases}$ ou $\begin{cases} x^4+781\equiv 2[5] \\ 3y^4\equiv 3[5]\end{cases}$

Donc : $\forall x\in\mathbb{Z}$ et $\forall y\in\mathbb{Z}$ $x^4+781\neq 3y^4$

Donc : $S=\varnothing$

Exercice19 :soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante: (E) : $36x-25y=5$

1)montrer que si $(x;y)$ est une solution de l'équation(E) alors x est un multiple de 5

2)déterminer une solution particulière de l'équation(E)et résoudre (E)

3) soit $(x;y)$ une solution de l'équation(E) Et $x\wedge y=d$ .Déterminer les valeurs possibles de d et Déterminer les solutions $(x;y)$de (E) tel que $x\wedge y=1$

Solution : 1)$(x;y)\in S\Leftrightarrow$ $36x-25y=5$

$\Leftrightarrow 36x=5(1+5y)\Rightarrow 5/36x$

Or on sait que : $5\wedge 36=1$

Donc d'après le théorème de Gauss : $5/x$

Donc x est un multiple de 5

Donc : $\exists x'\in\mathbb{Z}$: $x=5x'$

2)déterminons une solution particulière de l'équation(E) ?

On a : $36x-25y=5 \Leftrightarrow 36\times 5x'-25y=5$

$\Leftrightarrow 36x'-5y=1$

On remarque que : $(1;7)$ est une solution particulière de l'équation :$36x'-5y=1$

Donc : $(5;7)$ est une solution particulière de l'équation (E)

$(x;y)\in S\Leftrightarrow 36x-25y=5$ et $36\times 5-25\times 7=5$

$\Leftrightarrow 36(x-5)=25(y-7)$

On a donc : $36/25(y-7)$Et puisque : $25\wedge 36=1$

Alors : $36/y-7$ Donc :

$\exists k\in\mathbb{Z} / y-7=36k \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} / y=36k+7$

$(E)\Leftrightarrow \begin{cases} 36(x-5)=25(y-7) \\ \exists k\in\mathbb{Z} / y=36k+7\end{cases}$

$\begin{cases} x-5=25k \\ \exists k\in\mathbb{Z} / y=36k+7\end{cases} \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} / \begin{cases} x=25k+5 \\ \exists k\in\mathbb{Z} / y=36k+7\end{cases}$

Inversement : $(25k+5;36k+7)$est solution de l'équation (E)

Donc $S=\{(25k+5;36k+7) / k\in\mathbb{Z}\}$

3)soit $(x;y)\in S$ déterminons : $x\wedge y=d$

On a : $\exists k\in\mathbb{Z} / x=25k+5$ et $y=36k+7$

Et on a : $\begin{cases} d/x \\ d/y\end{cases} \Rightarrow d/36x-25y=5$

Donc : $d=1$ ou $d=5$

Si $d=5$ alors $5/y=7+36k$ car $5/x$

Donc : $7+36k\equiv 0[5]$ cad $2+k\equiv 0[5]$ cad $k\equiv 3[5]$

Si $d=1$ alors $k\equiv 4[5]$ ou $k\equiv 2[5]$ ou $k\equiv 1[5]$ ou $k\equiv 0[5]$ donc :

$k=4+5\alpha$ ou $k=2+5\alpha$ ou $k=1+5\alpha$ ou $k=5\alpha$

Avec : $\alpha\in\mathbb{Z}$

Donc : $(x;y)\in S$ et $x\wedge y=1$ ssi

$(x;y)\in\{(125\alpha+30;180\alpha+43);(125\alpha+55;180\alpha+79);$
$(125\alpha+105;180\alpha+151);(125\alpha+5;180\alpha+7);\alpha\in\mathbb{Z}\}$

Exercice20: on pose $A=\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$

1)soit $a\in A$ discuter suivant a le nombre de solutions de l'équation : (E) $x^2=a$ dans A

2)soient p et q deux éléments de A

On considére l'équation : (F) $x^2-\bar{2}px+q=\bar{0}$

Montrer que l'équation : (E)admet une solution ssi p^2-q appartient à un ensemble B à déterminer

3)application :

a)résoudre dans A l'équation: $x^4+\bar{3}x^2+\bar{4}=\bar{0}$ (G)

b)déterminer les nombres entiers naturels b Tels que : 11 divise $\overline{10304}_{(b)}$

Solution :1) On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$

l'équation : (E)admet une solution unique dans A si $a=0$

l'équation : (E)admet deux solution différentes dans A si $a\in\{\bar{1};\bar{3};\bar{4};\bar{5};\bar{9}\}$

l'équation : (E)n'admet pas de solution dans A si $a\in\{\bar{2};\bar{6};\bar{7};\bar{8};\overline{10}\}$

2) $x\in A$;(F) $x^2-\bar{2}px=(x-p)^2-p^2$

$x^2-\bar{2}px+q=\bar{0}\Leftrightarrow (x-p)^2=p^2-q$

l'équation : (F) admet une solution dans A ssi $p^2-q\in\{\bar{0};\bar{1};\bar{3};\bar{4};\bar{5};\bar{9}\}$ donc : $B=\{\bar{0};\bar{1};\bar{3};\bar{4};\bar{5};\bar{9}\}$

3) a)résoudre dans A l'équation : $x^2+\bar{3}x+\bar{4}=\bar{0}$ (G) ?

$x^4+\bar{3}x^2+\bar{4}=\bar{0} \Leftrightarrow X^2+\bar{3}X+\bar{4}=\bar{0}$ avec : $X=x^2$

$\Leftrightarrow X^2-\bar{8}X+\overline{16}=\bar{0}$ car $\bar{4}=\overline{15}$ et $\bar{3}=-\bar{8}$

$\Leftrightarrow \left(X-\bar{4}\right)^2=\bar{1} \Leftrightarrow X-\bar{4}=\bar{1}$ ou $X-\bar{4}=\overline{10}$

$(G) \Leftrightarrow X=\bar{5}$ ou $X=\bar{3}$

$\Leftrightarrow x^2=\bar{5}$ ou $x^2=\bar{3}$

$\Leftrightarrow x=\bar{4}$ ou $x=\bar{7}$ ou $x=\bar{5}$ ou $x=\bar{6}$

Donc : l'ensemble des solutions de (G) est :

$S=\left\{\bar{4};\bar{5};\bar{6};\bar{7}\right\}$

3)b)déterminons les nombres entiers naturels b Tels que : 11 divise $\overline{10304}_{(b)}$?

On a : $\overline{10304}_{(b)}=b^4+3b^2+4$

$11 / \overline{10304}_{(b)} \Leftrightarrow b^4+3b^2+4\equiv 0[11]$

$\Leftrightarrow \bar{b}^4+\bar{3}\bar{b}^2+\bar{4}=\bar{0}$ dans A

$\Leftrightarrow \bar{b}\in\left\{\bar{4};\bar{5};\bar{6};\bar{7}\right\}$

$\Leftrightarrow \bar{b}\in\bar{4}\cup\bar{5}\cup\bar{6}\cup\bar{7} \Leftrightarrow b=11k+r$ et $r\in\{4;5;6;7\}$

Et $k\in\mathbb{N}$

Exercice21: On suppose qu'il existe des entiers naturels non nuls m , n et a tels que:
(4 m+ 3)(4 n+ 3)=4 a^2+ 1

1) Soit p un nombre premier quelconque divisant 4 m+ 3 .
Montrer que p est impair et que :

$(2a)^p-1\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}[p]$

2) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que : $p\equiv 1[4]$

3. En utilisant la décomposition de 4 m+ 3 en facteurs premiers obtenir une contradiction

Solution :

1) $4m\equiv 0[2]$ donc $4m+3\equiv 3[2]$ donc $4m+3\equiv 1[2]$

4 m+ 3 n'est pas divisible par 2 donc p≠2 et donc p est impair.
p est impair donc p=2 q+ 1 avec q∈ℕ
p est un diviseur de 4 m+ 3
4 m+ 3 est un diviseur de 4 a^2+ 1
Donc p est un diviseur de 4 a^2+ 1
Par suite : $4a^2+1\equiv 0[p]$ donc $4a^2\equiv -1[p]$

donc $(2a)^2\equiv -1[p]$ donc $(2a)^{2q}\equiv(-1)^q[p]$

Or, $2q\equiv p-1$ donc $q\equiv\dfrac{p-1}{2}$

On a donc : $(2a)^p-1\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}[p]$

2) Pour pouvoir utiliser le théorème de Fermat, on doit vérifier que p et 2a sont premiers entre eux.
p étant un nombre premier il suffit de vérifier que p n'est pas un diviseur de 2a.
On suppose que $2a\equiv 0[p]$

On a alors $4a^2\equiv 0[p]$ et donc $4a^2+1\equiv 1[p]$

Or, on a vu dans la question précédente que : $4a^2+1\equiv 0[p]$

Donc p n'est pas un diviseur de 2a et p et 2a sont premiers entre eux
D'après le théorème de Fermat :

$(2a)^{p-1}\equiv 1[p]$

Or d'après la première question :

$(2a)^p-1\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}[p]$

On a donc: $(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1[p]$

Cela signifie que $\dfrac{p-1}{2}$ est un nombre pair.

Or $q\equiv\dfrac{p-1}{2}$ Donc q est un nombre pair.

Il existe q' ∈ℕ tel que q=2 q'
p=2 q+ 1
p=4 q'+ 1
et donc : $p\equiv 1[4]$

3) 4 m+ 3= $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_m^{\alpha_m}\equiv 1[p]$

p_1 ; p_2 ;…. : p_m sont des nombres premiers distincts.et $\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_m$ sont des entiers naturels non nuls.

p_1 ; p_2 ;…. : p_m sont des nombres premiers qui divisent 4 m+ 3
D'après la question précédente :

$p_1\equiv 1[4]$ et $p_2\equiv 1[4]$ et …… et $p_m\equiv 1[4]$

Donc : $p_1^{\alpha_1}\equiv 1[4]$; $p_2^{\alpha_2}\equiv 1[4]$… $p_m^{\alpha_m}\equiv 1[4]$

Par suite : $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_m^{\alpha_m}\equiv 1[4]$

$4m+3\equiv 1[4]$

Or, $4m\equiv 0[4]$ donc : $4m+3\equiv 3[4]$

Il y a contradiction, il n'existe pas des entiers naturels non nuls m , n et a tels que:
(4 m+ 3)(4 n+ 3)=4 a^2+ 1

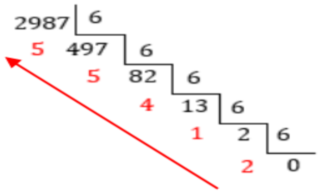
Exercice22 : Démontrer que pour tout entier naturel non nul n on a N=$n^{13}-n$ est divisible par 13; 7; 5; 3 et 2.

Solution :13 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat :

$n^{13}-n$ est divisible par 13.
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)$
$12=2^2\times3$ donc :Le nombre 12 à 6 diviseurs
$D_{12}=\{1 ;2 ;3;4;6;12\}$
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n(n^6-1)(n^6+1)=(n^7-n)(n^6+1)$
7 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat :
n^7-n est divisible par 7.
Par suite, $n^{13}-n$ est divisible par 7.
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n[(n^4)^3-1]$
On utilise le résultat de l'exercice précédent :
$n[(n^4)^3-1]$est un multiple de n^4-1
Donc il existe K $\in\mathbb{N}$ tel que : $(n^4)^3-1=(n^4-1)K$
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)= n[(n^4)^3-1]=n(n^4-1)\ K=(n^5-n)K$
5 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat : n^5-n est divisible par 5. Par suite, $n^{13}-n$ est divisible par 5
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n[(n^2)^6-1]$
On utilise le résultat de l'exercice précédent :
$(n^2)^6-1$ est un multiple de n^2-1 .
Donc il existe K ' $\in\mathbb{N}$ tel que : $(n^2)^6-1=(n^2-1)\ K'$
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=(n^3-n)\ K'$
3 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat : n^3-n est divisible par 3.
Par suite, $n^{13}-n$ est divisible par 3.
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)$
On utilise le résultat de l'exercice précédent :
$n^{12}-1$ est un multiple de $n-1$
Donc il existe K'' $\in\mathbb{N}$ tel que: $n^{12}-1=(n-1)K''$
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n(n-1)K''=(n^2-n)K''$
2 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat : n^2-n est divisible par 2.
Par suite, $n^{13}-n$ est divisible par 2.

Exercice50 :
1) Soient p et q deux nombres premiers distincts montrer que $p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1\ [pq]$
2) Considérons dans $\mathbb{Z}$ l'équation :
$(E) : x^4+781=3y^4$
Et soit S son ensemble de solution :
a) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{Z})\ (x^4\equiv 1\ [5]$ ou $x^4\equiv 0\ [5])$
b) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{Z})\ (x^4+781\equiv 2\ [5]$ ou $x^4+781\equiv 1\ [5])$
c) Déterminer l'ensemble S.

Exercice23 : Soit Le nombre $n=\overline{2987}_{(10)}$
Écrire n dans la base 6 :
Solution :
On a : 2987 = 6 × 497 + 5
497 = 6 × 82 + 5
82 = 6 × 13 + 4
13 = 6 × 2 + 1
2 = 6 × 0 + 2
Donc $2987=2\times6^4+1\times6^3+4\times6^2+5\times6+5$
$n=\overline{21455}_{(6)}$
Cette succession de divisions Euclidiennes se représente comme suite :



Exercice24 :soit $N=\overline{dcba}_{(10)}$ un entier naturel
montrer que : $N\equiv a-b+c-d\,[11]$
Solution :
on a : $N=\overline{dcba}=a+b\times10+c\times10^2+d\times10^3$
et on a : $10\equiv-1[11]$ et $10^2\equiv1[11]$ et $10^3\equiv-1[11]$
Donc : $N\equiv a-b+c-d\,[11]$

Exercice25 : calculer :
$\overline{2534}_{(7)}+\overline{631}_{(7)}$
Solution :
a) La décomposition :
$\overline{2534}_{(7)}+\overline{631}_{(7)}=2\times7^3+5\times7^2+3\times7^1+4\times7^0+$
$+6\times7^2+3\times7^1+1\times7^0$
$\overline{2534}_{(7)}+\overline{631}_{(7)}=2\times7^3+11\times7^2+6\times7^1+5\times7^0$
$\overline{2534}_{(7)}+\overline{631}_{(7)}=3\times7^3+4\times7^2+6\times7^1+5\times7^0$
$\overline{2534}_{(7)}+\overline{631}_{(7)}=\overline{3465}_{(7)}$
b) Calcul direct avec le retenu

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1 \\ \overline{2534}_{(7)} \\ +\quad \overline{631}_{(7)} \\ \hline =\overline{3465}_{(7)} \end{array}$$

Exercice26: calculer
1) $\overline{327}_{(8)}\times\overline{56}_{(8)}$ 2) $\overline{432}_{(5)}\times\overline{134}_{(5)}$
Solution : Il est préférable d'effectuer le produit en utilisant le calcul direct avec le retenu car la décomposition risque d'être longue :

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1\ 4 \\ \scriptstyle 2\ 5 \\ \overline{327}_{(8)} \\ \times\quad \overline{56}_{(8)} \\ \hline 2412 \\ +\ 2063 \\ \hline =\overline{23242}_{(8)} \end{array}$$

$\overline{327}_{(8)}\times\overline{56}_{(8)}=\overline{23242}_{(8)}$
Pour vérifier : $\overline{327}_{(8)}\times\overline{56}_{(8)}$
$=(3\times8^2+2\times8+7)\times(5\times8+6)$
$=9890=\overline{23242}_{(8)}$
2) $\overline{432}_{(5)}\times\overline{134}_{(5)}$
$=(4\times5^2+3\times5+2)\times(5^2+3\times5+4)$
$=4\times5^4+3\times5^3+2\times5^2+12\times5^3+9\times5^2+6\times5$
$+16\times5^2+12\times5+8$
$=5^5+3\times5^4+5^3+4\times5+3$

$=\overline{131043}_{(5)}$

Exercice27 : effectuer dans la base 9

$\overline{6432}_{(7)}\times\overline{54}_{(8)}$

Solution :

$\overline{6432}_{(7)}\times\overline{54}_{(8)}=$

= (6 × 7^3 + 4 × 7^2 + 3 × 7 + 2) × (5 × 8 + 4)

= 100188

= 1 × 9^5 + 6 × 9^4 + 2 × 9^3 + 3 × 9^2 + 8 × 9 + 0

$=\overline{162380}_{(9)}$

Exercice28 : monter que

1) $x\equiv 0\ [5] \Leftrightarrow a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$

2) $x\equiv 0\ [25] \Leftrightarrow \overline{a_1a_0}\in\{0,25,50,75\}$

3) $x\equiv 0\ [3] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0\ [3]$

4) $x\equiv 0\ [9] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0\ [9]$

5) $x\equiv 0\ [11] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i \equiv 0\ [11]$

6) $x\equiv 0\ [4] \Leftrightarrow \overline{a_1a_0}\equiv 0\ [4]$

Exercice29 : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$

où $(a_n;b_n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$

Montrer que : $a_n \wedge b_n = 1$

Solution : Soit $n\in\mathbb{N}^*$

En développant $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ par la formule du binôme de Newton et en séparant les termes où $\sqrt{2}$ apparaît à un exposant pair des termes où $\sqrt{2}$ apparaît à un exposant impair, on écrit $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ sous la forme $a_n + b_n\sqrt{2}$ où $(a_n;b_n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$. Un calcul conjugué fournit

$\left(1-\sqrt{2}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ et donc :

$\left(1-\sqrt{2}\right)^n\left(1+\sqrt{2}\right)^n = (-1)^n = \left(a_n+b_n\sqrt{2}\right)\left(a_n-b_n\sqrt{2}\right)$

$(-1)^n = a_n{}^2 - 2b_n{}^2$ Ou finalement :

$\left((-1)^n\times a_n\right)a_n + \left(2(-1)^{n+1}\times b_n\right)\times b_n = 1$

donc : $ua_n + vb_n = 1$

où u = $(-1)^n\times a_n$ et v = $2(-1)^{n+1}\times b_n$

Sont des entiers relatifs. Le théorème de Bézout permet d'affirmer a_n et b_n sont premiers

Entre eux.

Exercice30 :1) Montrer que $\forall(k;n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$

$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ et $(n+1)C_{2n}^{n-1} = nC_{2n}^n$

2) Montrer que $\forall(k;n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$

$k\wedge n = 1 \Rightarrow n / C_n^k$

3) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $n+1 / C_{2n}^n$

Solution : 1)

$$kC_n^k = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\left((n-1)-(k-1)\right)!} = nC_{n-1}^{k-1}$$

$$(n+1)C_{2n}^{n-1} = (n+1)\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}$$

$$nC_{2n}^n = n\frac{(2n)!}{n!(n)!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n)!}$$ cqfd

2)on a : $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ Donc n / kC_n^k et puisque k et n sont premiers entre eux , le théorème de Gauss permet d'affirmer que n / C_n^k

3) De même, on a : $(n+1)C_{2n}^{n-1} = nC_{2n}^n$

Donc : $n+1 / nC_{2n}^n$ et on montre que n et (n + 1) sont premiers entre eux (d'après Bézout puisque (n + 1) − n = 1 donc d'après le théorème de Gauss : $n+1 / C_{2n}^n$

Exercice 31 : Pour $\forall n\in\mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n}+1$ (Nombres de Fermat). Montrer que les nombres de Fermat sont deux à deux premiers entre eux.

Solution :

Soient n et m deux entiers naturels tels que n < m. Posons m = n + k avec k > 0. On note que

$$F_m = 2^{2^{n+k}}+1 = \left(2^{2^n}\right)^{2^k}+1 = \left(F_n-1\right)^{2^k}+1$$

En développant l'expression précédente par la formule du binôme de Newton et en tenant compte du fait que 2^kest pair

Puisque k est strictement positif, on obtient une expression de la forme

$F_m = qF_n + 1 + 1 = qF_n + 2$ Où q est un entier.

Le PGCD de F_n et F_m doit encore diviser :

$F_m - qF_n = 2$ et vaut donc 1 ou 2. Enfin, puisque 2^n et 2^m sont strictement positifs F_n et F_m sont impairs et leur PGCD vaut donc 1 (ce résultat redémontre aussi l'existence d'une infinité de nombres premiers).

Exercice 32 :

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}, 6 / 5n^3 + n$

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \; 7 / 4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$

Solution :

1) Soit n un entier relatif.

• Si n est pair, alors $5n^3 + n \equiv 5 \times 0^3 + 0$ [2] ou encore $5n^3 + n \equiv 0$ [2]. Dans ce cas, $5n^3 + n$ est divisible par 2.

Si n est impair, alors $5n^3 + n \equiv 5 \times 1^3 + 1$ [2] ou encore $5n^3 + n \equiv 6$ [2] ou enfin $5n^3 + n \equiv 0$ [2]. Dans ce cas aussi, $5n^3 + n$ est divisible par 2.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $2 \mid (5n^3 + n)$.

• Si n est multiple de 3, alors :

$5n^3 + n \equiv 5 \times 0^3 + 0$ [3] ou encore $5n^3 + n \equiv 0$ [3]. Dans ce cas, $5n^3 + n$ est divisible par 3.

Si n est de la forme 3k + 1 où k ∈ Z, alors $5n^3 + n \equiv 5 \times 1^3 + 1$ [3] puis $5n^3 + n \equiv 6$ [3] et donc $5n^3 + n \equiv 0$ [3].

Par suite, $5n^3 + n$ est divisible par 3.

Si n est de la forme 3k + 2 où k ∈ Z, alors , $5n^3 + n \equiv 5 \times 2^3 + 2$ [3] puis $5n^3 + n \equiv 42$ [3] et donc $5n^3 + n \equiv 0$ [3].

Dans ce cas aussi, $5n^3 + n$ est divisible par 3.

Finalement, ∀n ∈ Z, $3 \mid (5n^3 + n)$.

Enfin, pour tout n ∈ Z, $5n^3 + n$ est divisible par les nombres premiers 2 et 3 et donc par : 2 × 3 = 6. On a montré que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $6 \mid (5n^3 + n)$.

2) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \; 7 / 4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$

2) 4^{2^n} signifie $(...((4^2)^2)^2...)^2$

Etudions la suite de ces élévations au carré successives modulo 7.

$4^{2^0} = 4$ et donc $4^{2^0} \equiv 4$ [7].

Ensuite, $4^{2^1} \equiv 16$[7] ou encore $4^{2^1} \equiv 2$ [7].

Ensuite, $4^{2^2} \equiv 2^2$[7] ou encore $4^{2^2} \equiv 4$ [7] ...

Montrons par récurrence que :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $4^{2^{2k}} \equiv 4$ [7] et $4^{2^{2k+1}} \equiv 2$ [7].

• C'est vrai pour k = 0.

• Soit k > 0. Supposons que :

$4^{2^{2k}} \equiv 4$ [7] et $4^{2^{2k+1}} \equiv 2$ [7].

Alors : $4^{2^{2k+2}} = \left(4^{2^{2k+1}}\right)^2 \equiv (2)^2 \equiv 4[7]$

$$4^{2^{2k+3}} = \left(4^{2^{2k+2}}\right)^2 \equiv (4)^2 [7] \equiv 2[7]$$

On a montré par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$

$4^{2^{2k}} \equiv 4$ [7] et $4^{2^{2k+1}} \equiv 2$ [7].

Ensuite 2

$2^{2^0} \equiv 2$ [7] et $2^{2^1} \equiv 4$ [7]

puis, pour n > 1, $2^{2^n} = 2^{2\times 2^{n-1}} = \left(2^2\right)^{2^{n-1}} = 4^{2^{n-1}} = 2$

donc : $2^{2^{2k}} \equiv 2$ [7] et $2^{2^{2k+1}} \equiv 4$ [7].

Ainsi, que n soit pair ou impair $4^{2^n} + 2^{2^n} \equiv 6[7]$

donc : $4^{2^n} + 2^{2^n} + 1 \equiv 0[7]$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, \; 7 / 4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien