EXERCICES D'ARITHMÉTIQUES

Ex 1 q , p deux entiers naturels non nuls

1) Montrer que si $p \wedge q = 1$ alors $p \wedge (p+q) = 1$ et $p \wedge q(p+q) = 1$

2) x ; y deux entiers de $\mathbb{N}^*$ tels que : $(1)\quad x(43-x) = y(x+y)$

On pose $y = db$; $x = da$ et $a \wedge b = 1$

a) Montrer que $a(43-ad) = bd(a+b)$

b) Montrer que $a \mid d$ puis on pose $d = ac$

c) Prouver que $c(a^2+ab+b^2) = 43$ en déduire que $c = 1$

d) Déduire les solutions de l'équation (1)

Ex 2 On considère dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $(E)\quad x^2(x^2+7) = y(2x+y)$

Soit (x,y) un élément de $\mathbb{N}^2$ et on pose $x = da$; $y = db$ et $d = x \wedge y$

1) on suppose que (x,y) est solution de (E).

a) vérifier que $a^2(d^2a^2+7) = b(2a+b)$

b) déduire qu'il existe un entier k tel que $2a+b = ka^2$ et $d^2a^2+7 = kb$

c) prouver que $a = 1$ d) en déduire que $(b+1)^2 = d^2+8$

2) résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E)

Ex 3 1) a) déterminer suivant la parité de n le nombre $(n^2+1) \wedge (n+1)$

b) montrer que n^2+1 n'est pas un carré parfait

2) soient n ; a et b des entiers naturels tes que $a \wedge b = 1$ et $a(n^2+1) = b^2(n+1)$

a) montrer que $a \wedge b^2 = 1$ en déduire que $a \leq n$ et $b \leq n$

b) montrer que $(n^2+1) \wedge (n+1) = 2$

c) on pose $n+1 = 2q$ et $n^2+1 = 2p$ avec $p \wedge q = 1$ montrer que $a = q$ et $b^2 = p$

d) on suppose que $b = a+1$ déterminer les entiers n ; b et a

Ex 4 1) soit n un entier de $\mathbb{N}^*$.

a) montrer que si n est impair alors $n^2 \equiv 1\ [8]$

b) montrer que si n est pair alors $n^2 \equiv 0 \ [8]$ ou $n^2 \equiv 4 \ [8]$

2) soient a ; b et c trois entiers naturels non nuls et impairs

a) montrer que $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas un carré parfait

b) montrer que $2(ab + bc + ca) \equiv 6 \ [8]$

c) en déduire que $2(ab + bc + ca)$ n'est pas un carré parfait

d) montrer que $ab + bc + ca$ n'est pas un carré parfait

Ex 5

On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E) $x^2(x+y) = y^2(x-y)^2$

1) soit (x,y) une solution de (E) et on pose $y = bd$; $x = ad$ et $a \wedge b = 1$

a) vérifier que $db^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$

b) en déduire que $b = 1$

c) montrer que $a \neq 1$ et $(a-1) \mid (a+1)$

d) déduire que $a = 2$ ou $a = 3$

2) résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E)

Ex 6

(I) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $35u - 96v = 1$

1) vérifier que $(11,4)$ est une solution de (E)

2) en déduire l'ensemble de solutions de (E)

(II) On considère dans $\mathbb{N}$ l'équation (F) : $x^{35} \equiv 2 \ [97]$

1) soit x une solution de (F)

a) montrer que 97 est un nombre premier puis x et 97 sont premier entre eux

b) montrer que $x^{96} \equiv 1 \ [97]$ c) montrer que $x \equiv 2^{11} \ [97]$

2) soit x un entier naturel . montrer que si $x \equiv 2^{11} \ [97]$ alors x est solution de (F)

3) déduire l'ensemble de solutions de (F) (on donne $2^{11} \equiv 11 \ [97]$)

Ex 7

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. on pose $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

1) a) vérifier que a_n est pair pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$

b) déterminer les entiers naturels n vérifiant $a_n \equiv 0\ [3]$

2) soit p un entier premier tel que $p > 3$

a) montrer que $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$ et $3^{p-1} \equiv 1\ [p]$ et $6^{p-1} \equiv 1\ [p]$

b) en déduire que p divise a_{p-2}

3) montrer que pour tout entier naturel premier q il existe un entier n tel que $a_n \wedge q = q$

Ex 8 Soit p un entier premier supérieur à 2

1) soit a un entier naturel tel que $a \wedge p = 1$ et on pose $A = \{k \in \mathbb{N}^* \ /\ a^k \equiv 1\ [p]\}$

a) vérifier que $p - 1 \in A$

b) soit n_0 le plus petit élément de A . n un entier naturel et r le reste de la division de n par n_0

☞ montrer que $a^n \equiv a^r\ [p]$ ☞ en déduire que : $(\forall n \in A)\ \ n_0 | n$

3) On pose $U_n = \underbrace{1111.....11}_{n\ fois}$

a) vérifier que $9U_n = 10^n - 1$ b) montrer que $6 | n \Leftrightarrow 7 | U_n$

c) en déduire le plus petit entier divisible par 7 et s'écrit uniquement avec le chiffre 1 en base 10

Ex 9 On considère dans $\mathbb{Z}$ le système $(S)\ \begin{cases} x \equiv a\ [p] \\ x \equiv b\ [q] \end{cases}$ où a et b des entiers relatifs et p et q deux entier naturels tels que $p \wedge q = 1$

1) a) vérifier qu'il existe un couple (u_0, v_0) de $\mathbb{N}^2$ tel que $pu_0 - qv_0 = 1$

b) montrer que $x_0 = bpu_0 - aqv_0$ est solution de (S)

2) soit x une solution de (S) montrer que pq divise $x - x_0$.

3) soit x un entier tel que pq divise $x - x_0$ montrer que x est solution de (S) .

4) déduire les solution de (S) .

5) résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 1\ [8] \\ x \equiv 3\ [13] \end{cases}$