Calcul intégral

EXERCICE 1

Calculer les intégrales ci-dessous

$\int_{-1}^{2} x\lvert x-1\rvert \; dx$	$\int_{-1}^{0} \frac{tdt}{\left(2t^2+1\right)^3}$	$\int_{0}^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}} \; dx$	$\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \; dx$
$\int_{0}^{1} \frac{t^3-3t}{\left(t+1\right)^2} \, dt$	$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2-2x+1}$	$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \; dx$	$\int_{1}^{\sqrt[4]{3}} \frac{x}{x^4+1} \; dx$
$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \; dx$	$\int_{2}^{4} \frac{dt}{1-t^2}$	$\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x\left(1+\ln^2 x\right)} \; dx$	$\int_{0}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{9+4x^2}$

EXERCICE 2

En utilisant une intégration par partie determiner

$\int_{0}^{\pi} x^2 \cos x \; dx$	$\int_{0}^{1} \ln\left(1+x^2\right) \, dx$	$\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x^2} \; dx$
$\int_{0}^{\pi} e^x \cos x \; dx$	$\int_{1}^{3} \left(2x-1\right)\ln x \; dx$	$\int_{1}^{2} \left(2x-1\right)e^x \; dx$

EXERCICE 3

Calculer les integrales suivantes

$\int_{0}^{1} \frac{x^3dx}{\left(x^2+1\right)^3}$ poser $t = x^2$	$\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{2t-1}}{t} dt$ poser $x = \sqrt{2t-1}$
$\int_{2}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ poser $t = \sqrt{x-1}$	$\int_{1}^{4} \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$ poser $t = \sqrt{x}+1$
$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$ poser $t = \tan\frac{x}{2}$	$\int_{1}^{4} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ poser $x = \sqrt{t}$

EXERCICE 4

1) a) determiner deux réels b , a tels que $\left(\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}\right)$ $\frac{2x-5}{\left(x-1\right)^3} = \frac{a}{\left(x-1\right)^2} + \frac{b}{\left(x-1\right)^3}$

b) en déduire la valeur de $\int_{2}^{3} \frac{2x-5}{\left(x-1\right)^3} dx$

2) a) determiner b , a tels que $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right)$ $\dfrac{1}{x\left(1+x^2\right)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx}{x^2+1}$

b) en déduire $\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{1}{x\left(1+x^2\right)}dx$

c) utilisez une intégration par partie et calculer $\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{\arctan x}{x^2}dx$

EXERCICE 5

Soit n un entier naturel .

On considère la fonction φ_n définie par : $\varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$ et on pose $I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx$

1) calculer I_0 , I_1

2) a) montrer que $(I_n)_n$ est décroissante ; convergente

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $0 \le I_n \le \dfrac{1}{n+1}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

3) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n$

b) en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = 1$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n(nI_n - 1)$

EXERCICE 6

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$ et $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$

1) calculer I_0 ; I_1

2) a) montrer que $(I_n)_n$ est décroissante et convergente

b) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\dfrac{1}{n+1} \le I_n \le \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

3) a) montrer que $(\forall x \in [0,1])$ $0 \le \sqrt{2} - \sqrt{x+1} \le \dfrac{1}{2}(x-1)$

b) en déduire $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\dfrac{\sqrt{2}}{n+1} - \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)} \le I_n \le \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$ déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$