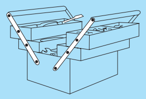
ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Compétences à atteindre

– *Résoudre des équations simples qui servent par exemple à l'étude des fonctions et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.*

– *Résoudre des inéquations qui servent par exemple à l'étude des fonctions et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.*

ACTIVITÉS POUR DÉCOUVRIR



1 *a) Dessine un cercle trigonométrique et l'angle $\widehat{EOM}$ d'amplitude égale à $\frac{\pi}{3}$ radians•.*

b) Quel angle a même sinus que l'angle de $\frac{\pi}{3}$ radians ?

Dessine ces angles. Quel nom donnes-tu à ces deux angles ? Montre sur le dessin la propriété des sinus•. Résous les équations $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $\sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Porte sur un cercle trigonométrique les angles solutions de la 1re équation et sur un autre ceux de la 2e équation.

2 *Quel angle a même cosinus que l'angle de $\frac{2\pi}{3}$ radians ? Dessine ces angles et nomme les deux angles ayant même cosinus•. Résous l'équation $\cos x = -\frac{1}{2}$ et porte ses solutions sur un cercle trigonométrique.*

Agis de même avec l'équation $\cos 3x = -\dfrac{1}{2}$.

3 *Quel angle a même tangente• que l'angle de $\frac{2\pi}{3}$ radians ? Dessine ces angles et nomme-les.*

Résous l'équation $\tan x = -\sqrt{3}$. Cite les conditions d'existence. Porte sur un cercle trigonométrique les valeurs interdites pour x ainsi que les solutions trouvées.

Confronte-les. Conclus !

Agis de même avec l'équation $\tan 2x = -\sqrt{3}$.

4 *a) Pour déterminer les angles d'amplitude x en radians tels que* $\cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

– *trace un cercle trigonométrique $\mathbb{C}$;*

– *sur l'axe des abscisses, place le point d'abscisse $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ainsi que les points dont l'abscisse est strictement inférieure à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;*

– *sur le cercle trigonométrique, sélectionne les angles convenables;*

– *écris ensuite l'ensemble des solutions.*

b) Agis de même pour résoudre les inéquations

$$\sin x > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 3\tan x - \sqrt{3} > 0.$$

EXERCICES

POUR APPLIQUER

2.1

(Les solutions comprises entre 0 et 2π seront portées sur un cercle trigonométrique).

ÉQUATIONS ÉLÉMENTAIRES

1. Résous dans $\mathbb{R}$:

1) $\sin 4y - \sin 2y = 0$

2) $\cos\left(3\gamma - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2\gamma + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

3) $\sin 2x = -\sin x$

4) $\tan 2z + \tan z = 0$

5) $\cos 2x = -\cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right)$

6) $\tan 2x = \cot x$.

RÈGLE DU PRODUIT NUL

ÉQUATIONS DU DEUXIÈME DEGRÉ

ÉQUATIONS A TRANSFORMER À L'AIDE DE FORMULES

2. Résous dans $\mathbb{R}$:

1^re série

1) $2\cos^2 x = 1$

2) $\tan^2 x + 4\tan x + 3 = 0$

3) $2\cos^2 x = \sin^2 x - \frac{1}{4}$.

2^e série

1) $2\sin^2 x - \cos x = 0$

2) $\tan x - \cot x = 1$

3) $\cos^2 x - \sin 2x = 0$.

3^e série

1) $\sin\gamma + \sin 3\gamma = \cos\gamma$

2) $\cos w + \cos 5w = \cos 3w + \cos 7w$

3) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 0.$

EXERCICES MÉLANGÉS

(Certains de ces exercices peuvent être résolus par diverses méthodes)

3. Résous dans $\mathbb{R}$:

1) $\tan^2 3x - 1 = 0$

2) $\cos x + \cos 3x + 2\cos 2x = 0$

3) $\tan 2\varphi = 2\tan\varphi$

4) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x$

5) $\sin\beta + \sin 3\beta = 1 + \cos 2\beta$

6) $\sin\left(4z - \frac{\pi}{5}\right)\cos\left(2z + \frac{\pi}{15}\right) = \sin\left(2z + \frac{\pi}{15}\right)\cos\left(4z - \frac{\pi}{5}\right)$

7) $\tan\beta = 4 - 3\cot\beta$

8) $2(1 + \cos 2\alpha) = \sin\alpha$

9) $\tan x + \tan 3x = 2\sin 2x$

10) $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$.

DOMAINE ET RACINES D'UNE FONCTION CIRCULAIRE

4. Cherche le domaine de définition et l'ensemble des racines des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x)$, telles que $f(x)$ égale

1) $\dfrac{1}{2\cos 3x + 1}$

2) $\dfrac{x+1}{\cos 3x + \cos x}$

3) $\dfrac{\cos 2x + \cos x}{2|\sin x| - 1}$

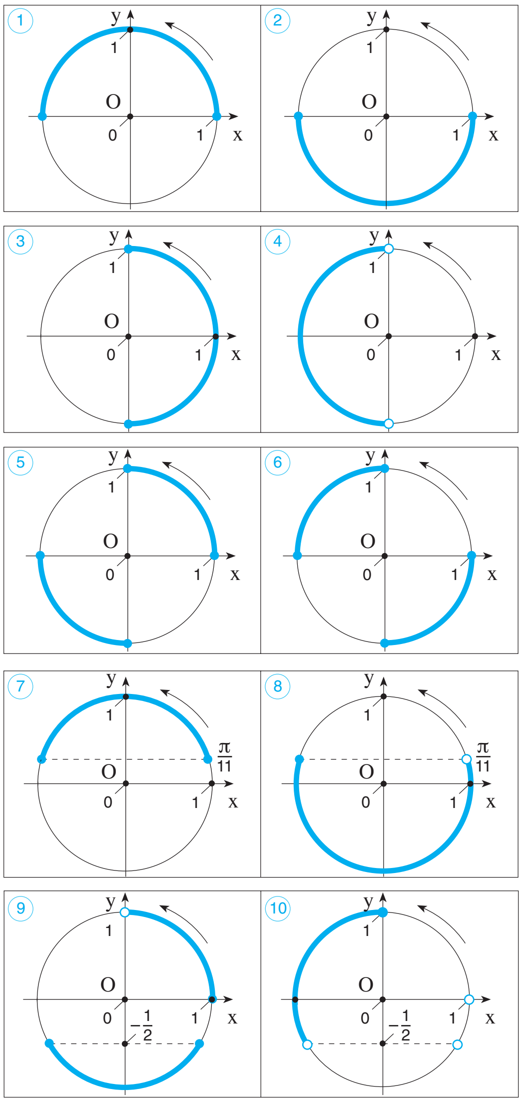
4) $\dfrac{\cos^2 x - \cos 2x}{\sin^2 x - \sin 2x}$

5) $\dfrac{\tan 2x}{\cot 2x + \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}$

6) $\dfrac{\tan 2x}{3\tan 2x - \tan x}$.

2.2

5. Décris, en termes d'intervalles de réels, les parties de cercle trigonométrique données dans les figures suivantes :



6. Résous dans $\mathbb{R}$ et porte sur un cercle trigonométrique les solutions comprises entre 0 et 2π :

1) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $3\tan y - \sqrt{3} \geqslant 0$

3) $1 - 3\sin z \leqslant 0$

4) $2\sin 3t + 1 < 0$

5) $\tan\frac{3\pi}{5} - \tan 2k \geqslant 0$

6) $\sin^2 x \leqslant \frac{3}{4}$

7) $2|\cos v| - 1 > 0$

8) $|\cot 2x| + 1 \leqslant 0$.

7. Détermine le domaine de définition et l'ensemble des racines de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

1) $x \to \sqrt{x}$

2) $x \to \sqrt{\tan x + 1}$

3) $x \to \sqrt{2\cos 3x - 1}$.

POUR S'AUTOCONTRÔLER

2.1

8. Résous dans $\mathbb{R}$:

1) $\tan 4x + 1 = 0$
2) $\cos 4z - \cos z = 0$
3) $\sin t = \sin\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)$
4) $\cos 2x = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
5) $\cos 2x + \cos x = 0$
6) $\tan 4v + \tan 3v = 0$
7) $\sin 3k + \sin\left(2k + \frac{\pi}{3}\right) = 0$
8) $(\tan 2x + 1)(\cot x - 2) = 0$
9) $\sin^2 x - 1 = 0$
10) $12\cos^2\alpha = 5 + 8\sin\alpha$
11) $\sin^2\beta - \cos 2\beta + 1 = 0$
12) $\sin 2t + \sin 4t - \sin 3t = 0$.

9. Détermine le domaine de définition et l'ensemble des racines des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

1) $x \to \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

2) $t \to \frac{\sin^2 2t - 1}{\tan 2t}$

3) $x \to \tan x - 2\sin x$

4) $u \to \frac{\cot u - 1}{\cos^2 u + \cos 2u - 2}$

5) $w \to 4\cos w - \frac{5}{\cos w} - 4\tan w$.

2.2

10. Résous dans $\mathbb{R}$:

1) $\sin 2x < 0$

2) $1 - 2\cos 5y < 0$

3) $3\tan 3z - \sqrt{3} \leqslant 0$

4) $|\tan 2t| - \sqrt{3} \geqslant 0$

5) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 < 0$.

11. Détermine le domaine de définition et l'ensemble des racines des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

1) $x \to \sqrt{\tan x + 1}$

2) $y \to \sqrt{2\cos 2y - \sqrt{2}}$.

SOLUTIONS DES EXERCICES POUR S'AUTOCONTRÔLER

2.1

8. 1) $x = -\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$ $\left(\text{CE} : x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}\right)$

2) $z = 2k\frac{\pi}{3}$ ou $z = 2k\frac{\pi}{5}$

3) $t = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $t = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$

4) $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\frac{\pi}{3}$ ou $\alpha = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

5) $x = k\frac{\pi}{3}$

6) $v = k\frac{\pi}{7}$ $\left(\text{CE} : v \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \text{ et } v \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right)$

7) $k = -\frac{\pi}{15} + 2k\frac{\pi}{5}$ ou $k = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

8) $x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ ou $x = 0,46365\ldots + k\pi$ $\left(\text{CE} : x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ et } x \neq k\pi\right)$

9) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

10) $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

11) $\beta = k\pi$

12) $t = k\frac{\pi}{3}$

9.

Domaine	Ensemble des racines
1) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\left\{ -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$
2) $\mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ k\frac{\pi}{2} \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$	ϕ car $\pm\frac{\pi}{4} + k\pi$ sont à écarter, elles n'appartiennent pas au domaine.
3) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$
4) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$
5) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

2.2

10. 1) $\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle\|\, \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) $\left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle\|\, -\frac{\pi}{15} + 2k\frac{\pi}{5} < y < \frac{\pi}{15} + 2k\frac{\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$

3) $\left\{ z \in \mathbb{R} \,\middle\|\, \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} < z \leqslant \frac{7\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$

4) $\frac{1}{2} < \sin x < 1$. $\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle\|\, \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

5) $\tan 2t \geqslant \sqrt{3}$ ou $\tan 2t \leqslant -\sqrt{3}$. $\left\{ t \in \mathbb{R} \,\middle\|\, \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

11.

Domaine	Ensemble des racines
1) $\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle\|\, -\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$
2) $\left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle\|\, -\frac{\pi}{8} + k\pi \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{8} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\left\{ \pm\frac{\pi}{8} + k\pi \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

POUR CHERCHER

2.1 et 2.2

ÉQUATIONS (méthodes diverses)

12. Résous dans $\mathbb{R}$ et porte sur un cercle trigonométrique les solutions comprises entre 0 et 2π

1) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

2) $\cos 2y + \cos y + 1 = \sin 3y + \sin 2y + \sin y$

3) $9\sin^4\gamma - 13\sin^2\gamma + 4 = 0$

4) $\cos^2 x - \sin^2 x + \tan^2 x = \frac{5}{6}$

5) $\tan^4 x + \tan^3 x - 7\tan^2 x - \tan x + 6 = 0$

6) $2\tan^3 2z + \tan^2 2z - 8\tan 2z - 4 = 0$

7) $\sin 2x \tan x - \tan x - \sin 2x + 1 = 0$

8) $2\sin x \sin 3x = 1$

9) $4\tan^2 w + 4\sin^2 w = 15$

10) $\dfrac{1+\cos\beta}{\sin\beta} = \dfrac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$.

11) $\sin 3x = 8\sin^3 x$.

ÉQUATIONS HOMOGÈNES en sin x et cos x

13. Une équation est homogène en $\sin x$ et $\cos x$, de degré n si, pour **chacun de ses termes**, la somme des puissances de $\sin x$ et de $\cos x$ égale n.

Pour résoudre une équation homogène en $\sin x$ et $\cos x$ dont les termes ne comportent plus aucun facteur commun en $\cos x$ ou en $\sin x$,

- *on divise les deux membres de l'équation par la plus haute puissance de* $\cos x$ *(ou de* $\sin x$*)*; on vérifiera que les solutions de $\cos x = 0$ (ou de $\sin x = 0$) ne sont pas des solutions de l'équation homogène;
- on prend ensuite $\tan x$ (ou $\cot x$) comme *inconnue auxiliaire*;
- on résout l'équation en $\tan x$ (ou $\cot x$) obtenue.

a) Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\sin x + 2\cos x = 0$

2) $3\sin x + 2\cos x = 0$

3) $2\cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x = 0$

4) $\cos^4 x + \sin^4 x = 4\cos^2 x \sin^2 x$.

b) Comment pourrais-tu rendre l'équation suivante homogène, du second degré, en $\sin t$ et $\cos t$:

$$2\sin^2 t - 4\sin t\cos t - 4\cos^2 t = -3\,?$$

Résous-la ensuite.

ÉQUATION DU TYPE a cos x + b sin x = c ($a \in \mathbb{R}_0$, $b \in \mathbb{R}_0$)

14.

> **Pour résoudre une équation du type $a\cos x + b\sin x = c$,**
>
> - *si* $c = 0$,
>   l'équation est alors homogène en $\sin x$ et $\cos x$, du premier degré (voir l'exercice 13);
> - *si* $c \neq 0$ *et* $a = 1$,
>   Dans $\cos x + b\sin x = c$, on calcule φ tel que $\tan\varphi = b$,
>   on remplace ensuite b par $\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ et on réduit au même dénominateur;
> - *si* $c \neq 0$ *et* $b = 1$,
>   on fait de même en posant $\tan\varphi = a$;
> - *si* $c \neq 0, a \neq 1$ *et* $b \neq 1$,
>   on divise les deux membres par a, on calcule φ tel que $\dfrac{b}{a} = \tan\varphi$ et on poursuit comme dans les cas précédents.

Résous dans $\mathbb{R}$:

1) $2\cos x + 2\sin x + 1 = 0$
2) $3\cos t + 2\sin t = 2$
3) $2\sin z + 3\cos z = 3$
4) $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

15. Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$3\cos x + \sin x + 3 = 0$$

1) par la méthode de factorisation du premier membre comme dans l'exercice **14**;

2) en substituant $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de $\tan\dfrac{x}{2}$.

La deuxième méthode est-elle aussi performante que la première ? Pourquoi ?

16. En substituant $\cos t$ et $\sin t$ en fonction de $\tan\dfrac{t}{2}$,

résous l'équation dans $\mathbb{R}$:

$$2\cos t\sin t + 2\sin t + \cos t + 1 = 0.$$

17. Si $I(t)$ est l'intensité (en ampères) du courant électrique à l'instant t (en secondes), calcule la plus petite valeur de t pour laquelle $I(t) = 2$ lorsque $I(t) = 4\sin(100\pi t - 6\pi)$.

18. La force de pesanteur varie selon les latitudes.

Si α est la latitude, l'accélération g due à la pesanteur est donnée, par exemple, par la formule

$$g = 9,81(1 - 0,00264\cos 2\alpha).$$

Calcule la latitude α en laquelle $g = 9,81$ m/s^2.

19. Une masse est suspendue à un ressort. Si elle est tirée de y_0 mètres vers le bas et si elle est lâchée avec une vitesse initiale de v_0 m/s, alors la position y de cette masse est exprimée par l'égalité

$$y = y_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

(t étant le temps en secondes, ω une constante positive).

a) Si $\omega = 1, y_0 = 2$m et $v_0 = 3$ m/s, factorise l'expression de y (voir exercice 67, page 34).

b) Calcule les temps pour lesquels y s'annule c.-à-d. les temps pour lesquels la masse passe par sa position d'équilibre.

VENUS D'AILLEURS

20. Résoudre et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique :

1) $2\tan x - \cot\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sqrt{3}$ (ERM, 2001)
2) $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$ (FPM)
3) $1 - \cos^2 2x = \sin 2x\cos x$ (UCL, 2001)
4) $\cos 2x + \sqrt{3}\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$ (ULB, 2003)
5) $\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x$ (ULg, 2003)

21. Résoudre les systèmes et disposer les solutions sur un cercle trigonométrique pour vérifier leur validité :

1) $\begin{cases} x + y = \dfrac{4\pi}{3} \\[2mm] \dfrac{\cos x}{\cos y} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (UCL, 2001)

2) $\begin{cases} 2\sin x = \cos y \\ \sin^2 x + \sin^2 y + \cos y + 0,75 = 0 \end{cases}$ (ULg, 2001)