

Exercice 01:

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

1. Montrer que pour tout x de \mathbb{R} ;

$$f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

2. Montrer que f est une fonction périodique de période π

3. Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$

Exercice 02:

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $\sqrt{2} \sin(x) + 1 = 0$

2. En déduire les solutions de l'équation :

$$\sqrt{2} \sin(x) + 1 = 0 \text{ dans }]-\pi, \pi]$$

Exercice 03:

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$; $\sin\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

2. $\cos(2x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$

3. $|\cos(2x)| = \frac{1}{2}$; $\cos(x) + \sqrt{3} \sin(x) = 0$

Exercice 04:

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\cos^2(x) = \sin^2(x)$

2. $\cos(x) = 2 \sin^2(x)$

3. $\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2}$

Exercice 05:

1. Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$. puis

porter les solutions sur un cercle trigonométrique

2. Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'inéquation $\cos(x) < -\frac{1}{2}$

3. Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$ l'inéquation

$$2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 < 0$$

Exercice 06:

Représenter sur un cercle trigonométrique l'ensemble des points M du cercle associés aux réels x vérifiant:

a) $0 \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq 1$

Exercice 07:

1. Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation :

$$(1 - \sqrt{2} \cos(x)) \sin(x) = 0$$

2. Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'inéquation :

$$(1 - \sqrt{2} \cos(x)) \sin(x) < 0$$

Exercice 08:

Soit $P(x) = 4 \sin^2(x) - 2(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \sin(x) - \sqrt{6}$

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$4X^2 - 2(\sqrt{2} - \sqrt{3})X - \sqrt{6} = 0$$

2. en déduire une factorisation du polynôme

$$4X^2 - 2(\sqrt{2} - \sqrt{3})X - \sqrt{6}$$

3. résoudre dans $]0; 2\pi]$ l'équation $P(x) = 0$

4. factoriser $P(x)$ puis résoudre dans $]0; 2\pi]$ l'inéquation $P(x) < 0$

Exercice 09:

On pose $A(x) = 2 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos(x + 5\pi) - 1$

1. Montrer que : $A(x) = (\cos(x) + 1)(2 \cos(x) - 1)$

2. Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation :

$$2 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos(x + 5\pi) - 1 = 0$$

3. Représenter les solutions de cette équation sur un cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

4. Soient A, B et C les points obtenus. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 10:

ABC est un triangle rectangle en A tel que $BC = 2a$

($a > 0$) et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$

Soit O le milieu du segment $[BC]$ et H le projeté orthogonal du point A sur (BC)

1. Montrer que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

2. Déduire que $OH = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ et que

$$AB = a\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

3. Dans le triangle AHB , calculer :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \text{ et } \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$$