

Partie (1) soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = -x \ln x \quad ; \quad x > 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

(C_f) sa courbe dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$

- 1) a) étudier la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 0$
b) étudier le sens de variation de f et donner son tableau de variation
- 2) a) étudier la position de (C_f) par rapport à la droite $(\Delta) y = x$
b) tracer la courbe (C_f)
- 3) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = e^{-2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < U_n < e^{-1}$
b) montrer que $(U_n)_n$ est croissante ; déduire qu'elle est convergente
c) déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

Partie (2) soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$

- 1) montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions a_n et b_n ($a_n < b_n$)
- 2) a) montrer que $(a_n)_n$ est décroissante et qu'elle est convergente
b) montrer que $(\forall n > 2) \quad a_n < \frac{1}{n}$ et déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$
- 3) a) montrer que $(\forall x > 2) \quad 2 \ln x < x$ puis déduire $(\forall n \geq 3) \quad \frac{1}{n^2} < a_n$
b) montrer que $(\forall n \geq 3) \quad \frac{\ln a_n}{\ln n} \geq -1 - \frac{\ln 2}{\ln n} - \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}$
et déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln a_n}{\ln n} = -1$
- 4) a) montrer que $(b_n)_n$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 1$
b) montrer que $(\forall n > 2) \quad (\exists c \in [b_n, 1]) \quad \frac{b_n - 1}{\ln b_n} = c$

c) déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(b_n - 1) = -1$

Partie (3) soit n un entier naturel . on considère la fonction f_n définie sur $[0, 1]$

$$\text{Par : } \begin{cases} f_n(x) = \frac{x^{2n+1} \ln x}{x^2 - 1} & ; \quad x \in]0, 1[\\ f(0) = 0 & ; \quad f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- 1) montrer que f_n est continue sur $[0, 1]$
- 2) g_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $g_n(x) = x^{2n+1} \ln x$; $x \neq 0$ et $g_n(0) = 0$
Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad g_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$
- 3) on pose $U_n(x) = \int_x^1 g_n(t) dt$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n(0) = \int_0^1 g_n(t) dt = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} U_n(x)$
a) calculer $U_n(x)$ pour x de $]0, 1[$ et déduire $U_n(0) = -\frac{1}{4(n+1)^2}$
b) calculer en cm^2 l'aire du domaine limitée par (C_f) ; les axes du repère et $x = 1$
- 4) on pose $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$ pour tout entier naturel n
a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad I_{n+1} - I_n = U_n(0)$
b) étudier le sens de variation de la fonction $\varphi(x) = -x + \frac{1}{x} + 2 \ln x$
- c) déduire que $(\forall x \in]0, 1[) \quad 0 < \frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$
- 5) on considère la suite $(V_n)_n$ définie par $V_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$
a) montrer que $(\forall n \geq 2) \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n}$
b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad I_0 = I_n + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$