

Exercice 1

Soit p un entier premier tel que $p \geq 3$

1) montrer $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 4^n \equiv 1 \pmod{p}$

2) soit q le plus petit entier de \mathbb{N}^* vérifiant $4^q \equiv 1 \pmod{p}$

r le reste de la division de n par q

a) Montrer que $4^r \equiv 1 \pmod{p}$

b) déduire que q divise n

4) déterminer le plus petit entier q tel que $4^q \equiv 1 \pmod{13}$

Exercice 2**Partie (1)**

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$

1) a) calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) étudier la dérivabilité de f à droite de 0

2) a) montrer que $(\forall x > 0) f'(x) = \frac{1-2x}{\sqrt{x}} e^{-x}$

b) étudier les variations de f et donner le tableau de variations

3) tracer la courbe (C_f)

Partie (2)

Soit h la restriction de f sur $I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$

1) montrer que h est bijective de I vers J à déterminer

2) soit φ la bijection réciproque de h .

a) dresser le tableau de variations de φ

b) montrer que $(\forall n \geq 2) (\exists! a_n \in J) \varphi(a_n) = \frac{1}{n}$

c) montrer que $(a_n)_n$ est décroissante et convergente

3) a) montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ et prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1$

b) en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} (e^{a_n} - 1) = 2$

Partie(3)

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_x^{4x} f(t) dt$

1) montrer que $(\forall x > 0) \frac{28}{3} x\sqrt{x}e^{-4x} \leq F(x) \leq \frac{28}{3} x\sqrt{x}e^{-x}$

2) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{F(x)}{x}$

3) a) montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$

et $(\forall x > 0) F'(x) = 2\sqrt{x}e^{-4x}(8 - e^{3x})$

b) étudier les variations de F

4) tracer la courbe de F (on donne $F(\ln 2) \approx 0.9$)