Institut Scolaire les Palmiers	Contrôle Continu 3 (S1) 01 Novembre 2019	2ème bac SM Durée : 2H

Exercice 1 (5 points)

① Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur $[0;1]$ telles que : $f(0)=0$, $f(1)=\frac{\pi}{4}$; $g(0)=0$; $g(1)=1$ et $(\forall x\in]0;1[)\ g'(x)\neq 0$

2 Montrer que : $(\exists \alpha\in]0;1[)\ /\ \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}=\frac{1}{1+g^2(\alpha)}$.

② En utilisant le théorème des accroissements finis, prouver

2 que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\quad \frac{x}{1+(x^2+x+1)^2}<\text{Arctan}(x^2+x+1)-\text{Arctan}(x^2+1)<\frac{x}{1+(x^2+1)^2}$

1 Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(\text{Arctan}(x^2+x+1)-\text{Arctan}(x^2+1)\right)$

Exercice 2 (15 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\text{Arctan}\sqrt{x^2-2x}$ si $x\leqslant 0$ et $f(x)=3x\sqrt[3]{x}+2x^2-8x$ si $x>0$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 1) a) Montrer que f est continue sur $]-\infty;+\infty[$

2,5 b) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en zéro puis interpréter géométriquement les résultats obtenus

1 c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

1 d) Déterminer les branches infinies de la courbe (C) au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

1 2) a) Démontrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

1,5 b) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ f'(x)=4(\sqrt[3]{x}+x-2)$ et $(\forall x\in\mathbb{R}_-^*)\ f'(x)=\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$

1,5 c) Déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$

1 3) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α dans $]2;3[$ (on donne : $\sqrt[3]{2}\simeq 1{,}26$ et $\sqrt[3]{3}\simeq 1{,}44$; $\alpha\simeq 2{,}1$)

1,5 b) Construire la courbe (C).

1 4) a) Montrer que $(\forall x\in[-2;-1])\ |f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}$

0,5 b) Déduire que $(\forall x\in[-2;-1])\quad |f(x)-\pi/3|\leqslant\frac{1}{2}|x+1|$

5) Soit g la réstriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty; 0]$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}

0,5 définie sur un intervalle J que l'on donnera.

1 b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour x de J