CORRECTION

Exercice n°1

Le quadruplet (D,A,C,H) détermine un repère orthonormal de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ ne sont pas coplanaires et sont même orthogonaux deux à deux

Le quadruplet (D,A,B,H) détermine un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DH}$ ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DB}$ ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (D,B,F,H) ne détermine pas un repère de l'espace car le vecteur $\overrightarrow{DF}$ s'exprime à l'aide de $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DH}$ (en effet $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DH}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DH}$

Le quadruplet (D,C,H,E) détermine un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{DE}$ ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{DE}$ ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (A,B,C,G) détermine un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (A,B,C,F) détermine un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}$ ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (A,B,C,H) détermine un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (A,B,C,E) détermine un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux

Exercice n°2

1) Le point O étant l'origine du repère, on aura O(0 ;0 ;0)

Puisque $\overrightarrow{OA}=1\times\overrightarrow{OA}+0\times\overrightarrow{OC}+0\times\overrightarrow{OD}$, on aura A(1 ;0 ;0). Puisque $\overrightarrow{OB}=1\times\overrightarrow{OA}+1\times\overrightarrow{OC}+0\times\overrightarrow{OD}$, on aura B(1 ;1 ;0)

Puisque $\overrightarrow{OC}=0\times\overrightarrow{OA}+1\times\overrightarrow{OC}+0\times\overrightarrow{OD}$, on aura C(0 ;1 ;0). Puisque $\overrightarrow{OD}=0\times\overrightarrow{OA}+0\times\overrightarrow{OC}+1\times\overrightarrow{OD}$, on aura D(0 ;0 ;1)

Puisque $\overrightarrow{OE}=1\times\overrightarrow{OA}+0\times\overrightarrow{OC}+1\times\overrightarrow{OD}$, on aura E(1 ;0 ;1). Puisque $\overrightarrow{OF}=1\times\overrightarrow{OA}+1\times\overrightarrow{OC}+1\times\overrightarrow{OD}$, on aura F(1 ;1 ;1)

Puisque $\overrightarrow{OG}=0\times\overrightarrow{OA}+1\times\overrightarrow{OC}+1\times\overrightarrow{OD}$, on aura G(0 ;1 ;1)

2) Le milieu de [AE]aura pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_E}{2}=1;\frac{y_A+y_E}{2}=0;\frac{z_A+z_E}{2}=\frac{1}{2}\right)$

3) Le centre I du carré DEFG est le milieu de chacune de ses diagonales, donc a pour coordonnées $\left(\frac{x_D+x_F}{2}=\frac{1}{2};\frac{y_D+y_F}{2}=\frac{1}{2};\frac{z_D+z_F}{2}=1\right)$

4) Le point de coordonnées $\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$ est le milieu de [OD]. Le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ est le milieu de [OB]. Le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ est le milieu de [OF].

Exercice n°3

1) Dans le repère $(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH})$: Le point D étant l'origine du repère, on aura D(0 ;0 ;0)

Puisque $\overrightarrow{DA}=1\times\overrightarrow{DA}+0\times\overrightarrow{DC}+0\times\overrightarrow{DH}$, on aura A(1 ;0 ;0). Puisque $\overrightarrow{DB}=1\times\overrightarrow{DA}+1\times\overrightarrow{DC}+0\times\overrightarrow{DH}$, on aura B(1 ;1 ;0)

Puisque $\overrightarrow{DC}=0\times\overrightarrow{DA}+1\times\overrightarrow{DC}+0\times\overrightarrow{DH}$, on aura C(0 ;1 ;0). Puisque $\overrightarrow{DE}=1\times\overrightarrow{DA}+0\times\overrightarrow{DC}+1\times\overrightarrow{DH}$, on aura E(1 ;0 ;1)

Puisque $\overrightarrow{DF}=1\times\overrightarrow{DA}+1\times\overrightarrow{DC}+1\times\overrightarrow{DH}$, on aura F(1 ;1 ;1). Puisque $\overrightarrow{DG}=0\times\overrightarrow{DA}+1\times\overrightarrow{DC}+1\times\overrightarrow{DH}$, on aura G(0 ;1 ;1)

Puisque $\overrightarrow{DH}=0\times\overrightarrow{DA}+0\times\overrightarrow{DC}+1\times\overrightarrow{DH}$, on aura H(0 ;0 ;1)

Dans le repère $(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DI})$: Le point D étant l'origine du repère, on aura D(0 ;0 ;0)

Puisque $\overrightarrow{DA}=1\times\overrightarrow{DA}+0\times\overrightarrow{DC}+0\times\overrightarrow{DI}$, on aura A(1 ;0 ;0). Puisque $\overrightarrow{DB}=1\times\overrightarrow{DA}+1\times\overrightarrow{DC}+0\times\overrightarrow{DI}$, on aura B(1 ;1 ;0)

Puisque $\overrightarrow{DC}=0\times\overrightarrow{DA}+1\times\overrightarrow{DC}+0\times\overrightarrow{DI}$, on aura C(0 ;1 ;0). Puisque $\overrightarrow{DE}=1\times\overrightarrow{DA}+0\times\overrightarrow{DC}+2\times\overrightarrow{DI}$, on aura E(1 ;0 ;2)

Puisque $\overrightarrow{DF}=1\times\overrightarrow{DA}+1\times\overrightarrow{DC}+2\times\overrightarrow{DI}$, on aura F(1 ;1 ;2). Puisque $\overrightarrow{DG}=0\times\overrightarrow{DA}+1\times\overrightarrow{DC}+2\times\overrightarrow{DI}$, on aura G(0 ;1 ;2)

Puisque $\overrightarrow{DH}=0\times\overrightarrow{DA}+0\times\overrightarrow{DC}+2\times\overrightarrow{DI}$, on aura H(0 ;0 ;2)

Exercice n°4

1) a) Puisque A est le point de coordonnées (1 ;1 ;0), cela signifie que $\overrightarrow{OA}=1\times\overrightarrow{OI}+1\times\overrightarrow{OJ}+0\times\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}$. Le quadrilatère OIAJ est donc un parallélogramme.

b) Dans le repère orthonormal $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$, on a $OA=\sqrt{(x_A-x_O)^2+(y_A-y_O)^2+(z_A-z_O)^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

2) a) Puisque B est le point de coordonnées (0 ;1 ;1), cela signifie que $\overrightarrow{OB}=0\times\overrightarrow{OI}+1\times\overrightarrow{OJ}+1\times\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}$. Le quadrilatère OJBK est donc un parallélogramme.

b) Dans le repère orthonormal $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$, on a $OB=\sqrt{(x_B-x_O)^2+(y_B-y_O)^2+(z_B-z_O)^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

Exercice n°5

1) $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B-x_A=1\\ y_B-y_A=-8\\ z_B-z_A=3\end{array}\right.$.

2) Si I est le milieu de [AB], alors $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{7}{2}\\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=1\\ z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Exercice n°6

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2+6^2}=\sqrt{61}$

Exercice n°7

1) Les vecteurs $\vec{u}(3;6;12)$ et $\vec{v}(2;4;8)$ sont colinéaires car $\vec{v}=\dfrac{2}{3}\vec{u}$

2) Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{u}+\vec{v}(5;10;20)$

3) Le vecteur $2\vec{u}$ a pour coordonnées $2\vec{u}(6;12;24)$. Le vecteur $5\vec{v}$ a pour coordonnées $5\vec{v}(10;20;40)$.

En soustrayant les coordonnées des deux vecteurs $2\vec{u}$ et $5\vec{v}$, le vecteur $2\vec{u}-5\vec{v}$ aura donc pour coordonnées $2\vec{u}-5\vec{v}(-4;-8;-16)$

Exercice n°8

Si $\overrightarrow{OC}=5\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$ alors les coordonnées de C sont C(5 ;4 ;-1)

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a donc pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B-x_A=-1\\ y_B-y_A=0\\ z_B-z_A=-12\end{array}\right.$ donc $2\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $2\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} -2\\ 0\\ -24\end{array}\right.$

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a donc pour coordonnées $\overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l} x_C-x_A=7\\ y_C-y_A=3\\ z_C-z_A=-11\end{array}\right.$ donc $4\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $4\overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l} 28\\ 12\\ -44\end{array}\right.$

En additionnant les coordonnées des deux précédents vecteurs, le vecteur $\vec{u}=4\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}$ aura donc pour coordonnées

$\vec{u}=4\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} -2+28=26\\ 0+12=12\\ -24+(-44)=-68\end{array}\right.$

Exercice n°9

Dans le repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les coordonnées de A sont A(10 ;0 ;0), celles de B(0 ;10 ;0) et celles de C(0 ;0 ;10). Ainsi $\overrightarrow{OA}\left|\begin{array}{l} 10\\ 0\\ 0\end{array}\right.$, $\overrightarrow{OB}\left|\begin{array}{l} 0\\ 10\\ 0\end{array}\right.$ et $\overrightarrow{OC}\left|\begin{array}{l} 0\\ 0\\ 10\end{array}\right.$

Puisque $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, les coordonnées de $\overrightarrow{OD}$ donc celles de D, sont $\overrightarrow{OD}(10;10;0)$. Ainsi D(10 ;10 ;0)

Le vecteur $\overrightarrow{OE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}-\frac{3}{10}\overrightarrow{OC}$ a donc pour coordonnées $\overrightarrow{OE}\left(\frac{3}{2}\times 10=15;\frac{2}{5}\times 10=4;-\frac{3}{10}\times 10=-3\right)$, donc le point E a pour coordonnées $E(15;4;-3)$

Puisque $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$, les coordonnées de $\overrightarrow{OF}$ donc celles de F, sont $\overrightarrow{OF}(10;0;10)$. Ainsi F(10 ;0 ;10)

Puisque $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, les coordonnées de $\overrightarrow{OG}$ donc celles de G, sont $\overrightarrow{OG}(10;10;10)$. Ainsi G(10 ;10 ;10)

Puisque $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, les coordonnées de $\overrightarrow{OH}$ donc celles de H, sont $\overrightarrow{OH}(0;10;10)$. Ainsi H(0 ;10 ;10)

Puisque $\overrightarrow{OK}=\frac{6}{5}\overrightarrow{OG}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OE}$, les coordonnées de $\overrightarrow{OK}$ donc celles de K, sont $\overrightarrow{OK}\left(\frac{6}{5}\times 10+\frac{1}{5}\times 15=15;\frac{6}{5}\times 10+\frac{1}{5}\times 4=\frac{64}{5};\frac{6}{5}\times 10+\frac{1}{5}\times(-3)=\frac{57}{5}\right)$. Ainsi $K\left(15;\frac{64}{5};\frac{57}{5}\right)$

Notons $L(x;y;z)$. D'une part les coordonnées de $\overrightarrow{AL}$ sont $\overrightarrow{AL}\begin{vmatrix} x-x_A=x-10 \\ y-y_A=y \\ z-z_A=z \end{vmatrix}$. D'autre part, les coordonnées de $\frac{2}{5}\overrightarrow{DB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OF}$ sont $\frac{2}{5}\overrightarrow{DB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OF}\begin{vmatrix} \frac{2}{5}\times(x_B-x_D)-\frac{1}{2}\times(x_F-x_O)=\frac{2}{5}\times(-10)-\frac{1}{2}\times 10=-9 \\ \frac{2}{5}\times(y_B-y_D)-\frac{1}{2}\times(y_F-y_O)=\frac{2}{5}\times 0-\frac{1}{2}\times 0=0 \\ \frac{2}{5}\times(z_B-z_D)-\frac{1}{2}\times(z_F-z_O)=\frac{2}{5}\times 0-\frac{1}{2}\times 10=-5 \end{vmatrix}$

De l'égalité $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{5}\overrightarrow{DB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OF}$, on déduit $\begin{cases} x-10=-9 \\ y=0 \\ z=-5 \end{cases}$. Le point L a donc pour coordonnées L(1 ;0 ;-5)

<u>Exercice n°10</u>

<u>1ère méthode</u> Le point G centre de gravité du triangle ABC est le barycentre du système $\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$. Ainsi

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{1\times x_A+1\times x_B+1\times x_C}{1+1+1}=\dfrac{3}{3}=1 \\ y_G=\dfrac{1\times y_A+1\times y_B+1\times y_C}{1+1+1}=\dfrac{5}{3} \\ z_G=\dfrac{1\times z_A+1\times z_B+1\times z_C}{1+1+1}=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

<u>2ème méthode :</u> Le point G vérifie l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ où I est le milieu de [BC]

Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{x_B+x_C}{2}=0;\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{5}{2};\frac{z_B+z_C}{2}=2\right)$

Le vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ a donc pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}(x_I-x_A)=-2;\frac{2}{3}(y_I-y_A)=\frac{5}{3};\frac{2}{3}(z_I-z_A)=\frac{4}{3}\right)$

Notons $G(x;y;z)$. D'une part les coordonnées de $\overrightarrow{AG}$ sont $\overrightarrow{AG}\begin{vmatrix} x-x_A=x-3 \\ y-y_A=y \\ z-z_A=z \end{vmatrix}$.

L'égalité $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ implique $\begin{cases} x-3=-2 \\ y=-\frac{5}{3} \\ z=\frac{4}{3} \end{cases}$. On retrouve bien les corodonnée de $G\left(1;-\frac{5}{3};\frac{4}{3}\right)$

Exercice n°11

1) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} x_B-x_A=2 \\ y_B-y_A=-2 \\ z_B-z_A=2 \end{vmatrix.$ et $\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix} x_C-x_A=2 \\ y_C-y_A=1 \\ z_C-z_A=-10 \end{vmatrix.$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel k unique satisfaisant aux trois conditions $\begin{cases} 2k=2 \\ -2k=1 \\ 2k=-10 \end{cases}$. Les points A,B et C ne sont donc pas alignés.

2) a) Notons $D(x;y;z)$. Alors $\overrightarrow{AD}\begin{vmatrix} x_D-x_A=x-2 \\ y_D-y_A=y-1 \\ z_D-z_A=z-3 \end{vmatrix.$ donc $3\overrightarrow{AD}\begin{vmatrix} 3(x_D-x_A)=3x-6 \\ 3(y_D-y_A)=3y-3 \\ 3(z_D-z_A)=3z-9 \end{vmatrix.$. Comme $2\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} 2(x_B-x_A)=4 \\ 2(y_B-y_A)=-4 \\ 2(z_B-z_A)=4 \end{vmatrix.$ et $\overrightarrow{BC}\begin{vmatrix} x_C-x_B=0 \\ y_C-y_B=3 \\ z_C-z_B=-12 \end{vmatrix.$, l'égalité $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ entraîne $\begin{cases} 4+3x-6=0 \\ -4+3y-3=3 \\ 4+3z-9=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{10}{3} \\ z=-\frac{7}{3} \end{cases}$. Ainsi $\boxed{D\left(\frac{2}{3};\frac{10}{3};-\frac{7}{3}\right)}$.

b) Les coordonnées du milieu E de [BC] sont $\left(x_E=\frac{x_B+x_C}{2}=4; y_E=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{1}{2}; z_E=\frac{z_B+z_C}{2}=-1\right)$

c) 1ère méthode : Le point F centre de gravité du triangle ABC est le barycentre du système $\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$.

Ainsi $\begin{cases} x_F=\frac{1\times x_A+1\times x_B+1\times x_C}{1+1+1}=\frac{10}{3} \\ y_F=\frac{1\times y_A+1\times y_B+1\times y_C}{1+1+1}=\frac{2}{3} \\ z_F=\frac{1\times z_A+1\times z_B+1\times z_C}{1+1+1}=\frac{1}{3} \end{cases}$

2ème méthode : On aurait pu utiliser l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ vérifiée par le point F.

d) Notons $G(x;y;z)$. Alors $\overrightarrow{GA}\begin{vmatrix} x_A-x_G=2-x \\ y_A-y_G=1-y \\ z_A-z_G=3-z \end{vmatrix.$ donc $3\overrightarrow{GA}\begin{vmatrix} 3(x_A-x_G)=6-3x \\ 3(y_A-y_G)=3-3y \\ 3(z_A-z_G)=9-3z \end{vmatrix.$. De plus $\overrightarrow{GB}\begin{vmatrix} x_B-x_G=4-x \\ y_B-y_G=-1-y \\ z_B-z_G=5-z \end{vmatrix.$ donc $2\overrightarrow{GB}\begin{vmatrix} 2(x_B-x_G)=8-2x \\ 2(y_B-y_G)=-2-2y \\ 2(z_B-z_G)=10-2z \end{vmatrix.$. Enfin $\overrightarrow{CG}\begin{vmatrix} x_G-x_C=x-4 \\ y_G-y_C=y-2 \\ z_G-z_C=z+7 \end{vmatrix.$

De l'égalité $3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{CG}$, on déduit $\begin{cases} 6-3x-(8-2x)=x-4 \\ 3-3y-(-2-2y)=y-2 \\ 9-3z-(10-2z)=z+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2 \\ 2y=7 \\ 2z=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{7}{2} \\ z=-4 \end{cases}$. Ainsi $\boxed{G\left(1;\frac{7}{2};-4\right)}$

Exercice n°12

On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} x_B-x_A=2 \\ y_B-y_A=3 \\ z_B-z_A=4 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix} x_C-x_A=4 \\ y_C-y_A=6 \\ z_C-z_A=8 \end{vmatrix}$. Puisque $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les points A,B et C sont alignés.

Exercice n°13

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} x_B-x_A=-\frac{3}{2} \\ y_B-y_A=-1 \\ z_B-z_A=-\frac{9}{2} \end{vmatrix}$. Si on note $D(x;y;z)$, les coordonnées de $\overrightarrow{DC}$ sont $\overrightarrow{DC}\begin{vmatrix} x_C-x=-x \\ y_C-y=-5-y \\ z_C-z=3-z \end{vmatrix}$. L'égalité $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ entraîne donc $\begin{cases} -x=-\frac{3}{2} \\ -5-y=-1 \\ 3-z=-\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-4 \\ z=\frac{15}{2} \end{cases}$.

Les coordonnées de D sont donc $\boxed{D\left(\frac{3}{2};-4;\frac{15}{2}\right)}$

Exercice n°14

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} x_B-x_A=-2 \\ y_B-y_A=1 \\ z_B-z_A=\frac{1}{2} \end{vmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix} x_C-x_A=1 \\ y_C-y_A=0 \\ z_C-z_A=-\frac{1}{2} \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{vmatrix} x_D-x_A=0 \\ y_D-y_A=1 \\ z_D-z_A=-\frac{1}{2} \end{vmatrix}$

D'après leur coordonnées, on constate que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$, ce qui implique que le point D appartient au plan formé par les trois autres points A,B,C, donc que A,B,C et D sont coplanaires

Exercice n°15

1) Un vecteur normal au plan *P* est le vecteur $\vec{n}(1;3;-1)$

2) a) Un point M de *P* est, par exemple $M(0;0;7)$

b) Le point L(1;-1;2) appartient au plan *P* si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan *P*.
On calcule $x_L+3y_L-z_L+7=1+3\times(-1)-2+7=3\neq 0$. Les coordonnées de L ne vérifiant pas l'équation du plan P, le point L n'appartient pas à P

c) Le point N(2;5;*z*) appartient au plan *P* si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan *P*, donc si et seulement si $x_N+3y_N-z_N+7=0 \Leftrightarrow 2+3\times 5-z+7=0 \Leftrightarrow z=24$. Le point N est donc $\boxed{N(2;5;24)}$

Exercice n°16

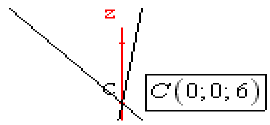
1) Un vecteur normal au plan P est le vecteur $\vec{n}(2;1;1)$

2) Notons $A(x_A;y_A;z_A)$. Si A appartient à l'axe des abscisses (Ox), alors $y_A = z_A = 0$. Si de plus A appartient au plan P, ses coordonnées vérifient l'équation de P, à savoir $2x_A + y_A + z_A = 6 \Leftrightarrow 2x_A = 6 \Leftrightarrow x_A = 3$. Ainsi $\boxed{A(3;0;0)}$

b) Notons $B(x_B;y_B;z_B)$. Si B appartient à l'axe (Oy), alors $x_B = z_B = 0$. Si de plus B appartient au plan P, ses coordonnées vérifient l'équation de P, à savoir $2x_B + y_B + z_B = 6 \Leftrightarrow y_B = 6$. Le point B est donc $\boxed{B(0;6;0)}$

c) Notons $C(x_C;y_C;z_C)$. Si C appartient à l'axe (Oz), alors $x_C = y_C = 0$. Si de plus C appartient au plan P, ses coordonnées vérifient l'équation de P, à savoir $2x_C + y_C + z_C = 6 \Leftrightarrow z_C = 6$. Le point C est donc $\boxed{C(0;0;6)}$

3) figure ci après



Exercice n°17

1) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} x_B - x_A = 5 \\ y_B - y_A = -1 \\ z_B - z_A = -5 \end{vmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix} x_C - x_A = 4 \\ y_C - y_A = -1 \\ z_C - z_A = -3 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{vmatrix} x_D - x_C = 5 \\ y_D - y_C = -1 \\ z_D - z_C = -5 \end{vmatrix}$

2) a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel k unique satisfaisant aux trois conditions $\begin{cases} 5k = 4 \\ -k = -1 \\ -5k = -3 \end{cases}$

b) A la lecture de leur coordonnées, on constate que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, donc que (AB)//(CD)

3) a) On calcule : $2x_A + 5y_A + z_A = 2\times(-3) + 5\times 4 + 6 = -6 + 20 + 6 = 20$ puis

$2x_B + 5y_B + z_B = 2\times 2 + 5\times 3 + 1 = 4 + 15 + 1 = 20$, $2x_C + 5y_C + z_C = 2\times 1 + 5\times 3 + 3 = 2 + 15 + 3 = 20$

$2x_D + 5y_D + z_D = 2\times 6 + 5\times 2 + (-2) = 12 + 10 - 2 = 20$. Les coordonnées de A,B,C et D vérifient donc cette équation.

b) Si A,B et S sont alignés, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont colinéaires. Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AS} = t\overrightarrow{AB}$

Notons $S(x;y;z)$. Alors $\overrightarrow{AS}\begin{vmatrix} x_S - x_A = x + 3 \\ y_S - y_A = y - 4 \\ z_S - z_A = z - 6 \end{vmatrix}$, et de l'égalité $\overrightarrow{AS} = t\overrightarrow{AB}$ on déduit $\begin{cases} x + 3 = 5t \\ y - 4 = -t \\ z - 6 = -5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5t - 3 \\ y = -t + 4 \\ z = -5t + 6 \end{cases}$

Mais puisque $x_S = 7$, on aura alors $5t - 3 = 7 \Leftrightarrow t = 2$. Le point S est donc $\boxed{S(7;2;-4)}$

c) Si O,F et P sont alignés, alors les vecteurs $\overrightarrow{OF}$ et $\overrightarrow{OP}$ sont colinéaires.

Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OF}$. Notons $P(x;y;z)$.

Alors $\overrightarrow{OP}\begin{vmatrix} x_P - x_O = x \\ y_P - y_O = y \\ z_P - z_O = z \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{OF}\begin{vmatrix} x_F - x_O = 1 \\ y_F - y_O = 1 \\ z_F - z_O = 1 \end{vmatrix}$. De l'égalité $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OF}$ on déduit $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

Mais puisque le point P vérifie l'équation de (E) on doit avoir $2t + 5t + t = 20 \Leftrightarrow t = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$. Ainsi $\boxed{P\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)}$

Exercice n°18

Un vecteur normal au plan $P_1\ :\ -x+y+2z-1=0$ est le vecteur $\overrightarrow{n_1}(-1;1;2)$

Un vecteur normal au plan $P_2\ :\ 3x-y=0$ est le vecteur $\overrightarrow{n_2}(3;-1;0)$

Un vecteur normal au plan $P_3\ :\ 2y-1=0$ est le vecteur $\overrightarrow{n_3}(0;2;0)$

Un vecteur normal au plan $P_4\ :\ 2x-z+3=0$ est le vecteur $\overrightarrow{n_4}(2;0;-1)$

Exercice n°19

1) Si $\vec{n}(3;2;1)$ est un vecteur normal au plan P_1, celui-ci a une équation de la forme $P_1\ :\ 3x+2y+z+d=0$

On utilise les coordonnées du point A(2;-3;5) pour déterminer d. $3x_A+2y_A+z_A+d=0 \Leftrightarrow d=-3x_A-2y_A-z_A$, c'est-à-dire $d=-3\times 2-2\times(-3)-5=-5$. L'équation de P_1 est donc $\boxed{P_1\ :\ 3x+2y+z-5=0}$

2) Si $\vec{n}(5;3;2)$ est un vecteur normal au plan P_2, celui-ci a une équation de la forme $P_2\ :\ 5x+3y+2z+d=0$

On utilise les coordonnées du point A(4;-2;1) pour déterminer d. $5x_A+3y_A+2z_A+d=0 \Leftrightarrow d=-5x_A-3y_A-2z_A$, c'est-à-dire $d=-5\times 4-3\times(-2)-2\times 1=-16$. L'équation de P_2 est donc $\boxed{P_2\ :\ 5x+3y+2z-16=0}$

3) Si $\vec{n}(0;2;1)$ est un vecteur normal au plan P_3, celui-ci a une équation de la forme $P_3\ :\ 2y+z+d=0$

On utilise les coordonnées du point A(1;1;0) pour déterminer d. $2y_A+z_A+d=0 \Leftrightarrow d=-2y_A-z_A$, c'est-à-dire $d=-2\times 1-0=-2$. L'équation de P_3 est donc $\boxed{P_3\ :\ 2y+z-2=0}$

Exercice n°20

1) Un vecteur normal au plan P d'équation : $2x-3y+6z-18=0$ est $\vec{n}(2;-3;6)$

2) Si le plan P' est parallèle au plan P, alors $\vec{n}(2;-3;6)$ est aussi un vecteur normal à P' qui aura donc une équation de la forme $2x-3y+6z+d=0$. On détermine d grâce aux coordonnées du point B(6 ;-4 ;-4) :

$2x_B-3y_B+6z_B+d=0 \Leftrightarrow d=-2x_B+3y_B-6z_B=0$. L'équation de P' est donc $\boxed{2x-3y+6z=0}$

Exercice n°21

Notons $A(x;y;z)$. Si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB}=t\vec{n}$

On calcule $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B-x_A=6-x \\ y_B-y_A=-4-y \\ z_B-z_A=-4-z \end{array}\right.$ et $t\vec{n}\left|\begin{array}{l} 2t \\ -3t \\ 6t \end{array}\right.$. De l'égalité $\overrightarrow{AB}=t\vec{n}$, on déduit $\begin{cases} 6-x=2t \\ -4-y=-3t \\ -4-z=6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6-2t \\ y=3t-4 \\ z=-4-6t \end{cases}$

Mais si A est un point du plan P, ses coordonnées vérifient l'équation de P, à savoir $2x_A-3y_A+6z_A-18=0$,donc

$$2(6-2t)-3(3t-4)+6(-4-6t)-18=0 \Leftrightarrow -49t=18 \Leftrightarrow t=-\frac{18}{49}$$

Le point A est donc $\begin{cases} x=6-2\times\left(-\dfrac{18}{49}\right)=\dfrac{330}{49} \\ y=3\times\left(-\dfrac{18}{49}\right)-4=-\dfrac{250}{49} \\ z=-4-6\times\left(-\dfrac{18}{49}\right)=-\dfrac{88}{49} \end{cases}$

La distance entre les plans parallèles P et P' est donnée par

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$= \sqrt{\left(6 - \frac{330}{49}\right)^2 + \left(-4 + \frac{250}{49}\right)^2 + \left(-4 + \frac{88}{49}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1296}{2401} + \frac{2916}{2401} + \frac{11664}{2401}} = \sqrt{\frac{15876}{2401}} = \sqrt{\frac{324}{49}} = \boxed{\frac{18}{7}}$$

Exercice n°22

1) Un vecteur normal du plan P d'équation $2x + y - z = 5$ est $\vec{n}_1(2;1;-1)$. Un vecteur normal du plan P' d'équation $-x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 7$ est $\vec{n}_2\left(-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. Les vecteurs $\vec{n}_1(2;1;-1)$ et $\vec{n}_2\left(-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ n'étant pas colinéaires (il n'existe pas de réel k unique satisfaisant à la fois $\begin{cases} 2k = -1 \\ 1 \times k = \frac{1}{2} \\ (-1) \times k = -\frac{1}{2} \end{cases}$), les deux plans P et P' ne sont pas parallèles

2) Un vecteur normal du plan P d'équation $x + 3y - 5z = 4$ est $\vec{n}_1(1;3;-5)$. Un vecteur normal du plan P' d'équation $-3x - 9y + 15z = -6$ est $\vec{n}_2(-3;-9;15)$. Puisque $\vec{n}_2 = -3\vec{n}_1$, les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires, donc les deux plans P et P' sont parallèles.

3) Un vecteur normal du plan P d'équation $x + 3y - 2z = 8$ est $\vec{n}_1(1;3;-2)$. Un vecteur normal du plan P' d'équation $-4x - 12y + 8z = -32$ est $\vec{n}_2(-4;-12;8)$. Puisque $\vec{n}_2 = -4\vec{n}_1$, les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires, donc les deux plans P et P' sont parallèles

Exercice n°23

1) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A = 1 \\ y_B - y_A = -1 \\ z_B - z_A = 1 \end{array}\right.$, $\overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l} x_C - x_A = -2 \\ y_C - y_A = 1 \\ z_C - z_A = 0 \end{array}\right.$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel k unique satisfaisant aux trois conditions $\begin{cases} k = -2 \\ -k = 1 \\ k = 0 \end{cases}$. Les points A,B et C ne sont donc pas alignés, donc définissent un plan (ABC).

b) Notons $\vec{n}\left|\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array}\right.$ les coordonnées d'un vecteur normal à (ABC)

Puisque $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$, on a $1 \times a + (-1) \times b + 1 \times c = 0 \Leftrightarrow a - b + c = 0$

Puisque $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0$, on a $(-2) \times a + 1 \times b + 0 \times c = 0 \Leftrightarrow -2a + b = 0$

Le système $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ -2a + b = 0 \end{cases}$ de deux équations à trois inconnues admettant une infinité de solutions, on doit « fixer arbitrairement » une valeur pour l'une quelconque des inconnues. L'énoncé nous conseille de choisir a=1

Le système devient alors $\begin{cases} a=1 \\ 1-b+c=0 \\ -2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=b-1=1 \\ b=2 \end{cases}$. Un vecteur normal à (ABC) est donc $\vec{n}\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$.

c) Une équation du plan (ABC) est alors $x+2y+z+d=0$. On détermine d en utilisant les coordonnées de l'un des points de ce plan, par exemple A(2 ;1 ;1). On obtient $x_A+2y_A+z_A+d=0 \Leftrightarrow d=-x_A-2y_A-z_A=-2-2-1=-5$

Une équation du plan (ABC) est alors $\boxed{x+2y+z-5=0}$.

2) Une équation de (ABC) étant de la forme $ax+by+cz=d$, les coordonnées de A,B et C vériant cette équation de plan, nous permettent de dresser le système de trois équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} ax_A+by_A+cz_A+d=0 \\ ax_B+by_B+cz_B+d=0 \\ ax_C+by_C+cz_C+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+c+d=0 \\ 3a+2c+d=0 \\ 2b+c+d=0 \end{cases}$$

Ce système admettant une infinité de solutions, on doit « fixer arbitrairement » une valeur pour l'une quelconque des inconnues. On fixe par exemple a = 1 Le système devient :

$$\begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ 2b+c+d=0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ -c-d=4 & L_4=L_3-2L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ c=1 & L_4+L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2-c-d=2 & L_1 \\ d=-3-2c=-5 & L_2 \\ c=1 & L_4+L_2 \end{cases}$$

On retrouve alors l'équation $\boxed{x+2y+z-5=0}$

Exercice n°24

1) P et P' admettent pour vecteurs normaux les vecteurs $\overrightarrow{n_1}(\cos t;\sin t;-1)$ et $\overrightarrow{n_2}(\cos t;\sin t;+1)$.

Le produit scalaire $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=(\cos t)(\cos t)+(\sin t)(\sin t)+(-1)(1)=(\cos t)^2+(\sin t)^2-1=1-1=0$ nous permet d'affirmer que les plans P et P' sont perpendiculaires.

2) l'axe Ox est parallèle à P pour toutes les valeurs de t pour lesquelles $\overrightarrow{n_1}(\cos t;\sin t;-1)$, vecteur normal à P sera orthogonal à tout vecteur directeur de l'axe Ox.

Un vecteur directeur de l'axe Ox est $\vec{u}(1;0;0)$. Le produit scalaire $\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{u}=(\cos t)\times 1+(\sin t)\times 0+(-1)(0)=\cos t$. Pour $t=\frac{\pi}{2}[\pi]$, $\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{u}=\cos t=0$, donc l'axe O$x$ est parallèle à P.

3) Les coordonnées des points de la droite intersection des deux plans vérifient le système $\begin{cases} (\cos t)x+(\sin t)y-z=0 \\ (\cos t)x+(\sin t)y+z=0 \end{cases}$, soit, par soustraction des deux lignes, $\begin{cases} (\cos t)x+(\sin t)y+z=0 \\ 2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos t)x+(\sin t)y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Si $t=\frac{\pi}{2}[\pi]$, puisque $\cos t=0$ et $\sin t=1$, le système est équivalent à $\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$. Un vecteur directeur de la droite intersection des deux plans est $\vec{v}(1;0;0)$

Si $t\neq\frac{\pi}{2}[\pi]$, $\begin{cases} (\cos t)x+(\sin t)y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\lambda\tan t \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$ Un vecteur directeur de la droite intersection des deux plans est $\vec{v}(-\tan(t);1;0)$

4) La distance de A(cos t, sin t, -3) au plan P vaut $\frac{|(\cos t)(\cos t)+(\sin t)(\sin t)+3|}{\sqrt{(\cos t)^2+(\sin t)^2+(-1)^2}}=\frac{|1+3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$