

Exercice 1 : (2,5 pts)

1) a - Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$ l'équation admet deux solutions distincts.

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2}$$

$$= \frac{2+4}{2} = 3 \quad \text{et} \quad = \frac{2-4}{2} = -1$$

$$S = \{-1; 3\}$$

b - Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$e^x - \frac{3}{e^x} - 2 = 0 \quad e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{(e^x)^2 - 2e^x - 3}{e^x} = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x - 3 = 0$$

On pose $t = e^x$ donc $t^2 - 2t - 3 = 0$
donc $t = 3$ ou $t = -1$

donc $e^x = 3$ ou $e^x = -1$ or $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$

D'où $S = \{\ln 3\}$

2) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante :

$$e^{x+1} - e^{-x} \geq 0$$

$$e^{x+1} - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{x+1} \geq e^{-x} \Leftrightarrow x+1 \geq -x$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

D'où $S = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

Exercice 2 : (4 pts)

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $Z^2 - 6Z + 18 = 0$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 18 = -36 < 0$$

$$= (6i)^2$$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{6+6i}{2} = 3+3i \quad \text{et} \quad z_2 = \bar{z}_1 = 3-3i$$

D'où $S = \{3-3i; 3+3i\}$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé

direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 3 + 3i$, $b = 3 - 3i$

a - Ecrire a et b sous forme trigonométrique

$$|a| = |3(1+i)| = 3|1+i| = 3\sqrt{1^2+1^2} = 3\sqrt{2}$$

$$a = 3(1+i) = 3\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 3\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{d'où } a = \left[3\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]$$

On a $b = \bar{a}$ donc $b = \left[3\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]$

b - Montrer que b' l'affixe du point B' image du point B par la translation de vecteur \vec{OA} est 6

B' image du point B par la translation de vecteur \vec{OA}

Donc $b' = b + \text{aff}(\vec{OA}) = b + a$

$$b' = 3 - 3i + 3 + 3i = 6 \quad \text{d'où } b' = 6$$

c - Montrer que : $\frac{b-b'}{a-b'} = i$ puis en déduire que

le triangle $AB'B$ est isocèle et rectangle en B'.

$$\frac{b-b'}{a-b'} = \frac{3-3i-6}{3+3i-6} = \frac{-3-3i}{-3+3i}$$

$$\frac{b-b'}{a-b'} = \frac{-3(1+i)}{-3(1-i)} = \frac{1+i}{1-i}$$

$$\frac{b-b'}{a-b'} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2}$$

D'où $\frac{b-b'}{a-b'} = i$

On a $\frac{b-b'}{a-b'} = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = \left[1; \frac{\pi}{2} \right]$

On a $\frac{b-b'}{a-b'} = \left[1; \frac{\pi}{2} \right]$ donc $\left| \frac{b-b'}{a-b'} \right| = 1$

Donc $\frac{BB'}{AB'} = 1$ et $\arg \left(\frac{b-b'}{a-b'} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Donc $AB' = BB'$ et $(\vec{B'A}; \vec{B'B}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

D'où le triangle $AB'B$ est isocèle et rectangle en B'.

d - En déduire que le quadrilatère $OAB'B$ est un carré

Le point B' image du point B par la translation de vecteur \vec{OA} donc $\vec{BB'} = \vec{OA}$

Donc le quadrilatère $OAB'B$ est un parallélogramme

On a $AB' = BB'$ et $(\vec{B'A}; \vec{B'B}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ Donc

D'où le quadrilatère $OAB'B$ est un carré

Exercice 3 : (3,5 pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{6U_n}{15U_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 1$$

1) a - Montrer que: $U_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{U_n - \frac{1}{3}}{15U_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{6U_n}{15U_n + 1} - \frac{1}{3} = \frac{18U_n - 15U_n - 1}{3(15U_n + 1)}$$

$$U_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{3(U_n - \frac{1}{3})}{3(15U_n + 1)} = \frac{U_n - \frac{1}{3}}{15U_n + 1}$$

$$\text{D'où } U_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{U_n - \frac{1}{3}}{15U_n + 1}$$

b - Montrer que : $U_n > \frac{1}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 1$ donc $U_0 > \frac{1}{3}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n > \frac{1}{3}$ et montrons

que $U_{n+1} > \frac{1}{3}$ c'est-à-dire $U_{n+1} - \frac{1}{3} > 0$

On a $U_n > \frac{1}{3}$ donc $U_n - \frac{1}{3} > 0$ et

$$15U_n + 1 > 6 \quad \text{donc } U_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{U_n - \frac{1}{3}}{15U_n + 1} > 0$$

$$\text{D'où } U_n > \frac{1}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n = 1 - \frac{1}{3U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ puis écrire V_n en fonction de n .

Montrons que $V_{n+1} = \frac{1}{6} V_n$?

$$V_{n+1} = 1 - \frac{1}{3U_{n+1}} = 1 - \frac{1}{\frac{18U_n}{15U_n + 1}}$$

$$V_{n+1} = 1 - \frac{15U_n + 1}{18U_n} = \frac{18U_n - 15U_n - 1}{18U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{3U_n - 1}{18U_n} = \frac{3U_n}{18U_n} - \frac{1}{18U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{18U_n} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{3U_n}\right)$$

$$\text{D'où } V_{n+1} = \frac{1}{6} V_n$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$

(V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ de premier

$$\text{terme } V_0 = 1 - \frac{1}{3U_0} = \frac{2}{3} \quad V_n = V_0 \left(\frac{1}{6}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{D'où } V_n = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3) Montrer que $U_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et

en déduire $\lim U_n$

$$\text{On a } V_n = 1 - \frac{1}{3U_n} \Leftrightarrow \frac{1}{3U_n} = 1 - V_n$$

$$\Leftrightarrow 3U_n = \frac{1}{1 - V_n} \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{3 - 3\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

$$\text{D'où } U_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{On a } U_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim U_n = \lim \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n} = \frac{1}{3 - 2 \times 0} = \frac{1}{3}$$

$$\text{D'où } \lim U_n = \frac{1}{3}$$

Problème : (10 pts)

Partie I :

On considère la fonction g définie sur $I =]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln x$

1) a - Montrer que $g'(x) = \frac{x+1}{x} \quad \forall x \in I$

$$g(x) = x - 1 + \ln x$$

$$\text{Donc } g'(x) = 1 + \frac{1}{x} \quad \text{d'où } g'(x) = \frac{x+1}{x} \quad \forall x \in I$$

b - Montrer que g est croissante sur I

$$\text{On a } g'(x) = \frac{x+1}{x} \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

Donc $g'(x) > 0$

D'où g est croissante sur I

2) En déduire que : $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in]0, 1]$

$$\text{Et que } g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

On sait que g est croissante sur $]0; +\infty[$

$$g(1) = 0$$

$$\forall x \in]0, 1] \quad \text{donc } 0 < x \leq 1$$

$$\text{donc } x \leq 1 \quad \text{donc } g(x) \leq g(1)$$

Or $g(1) = 0$

$$\text{D'où } g(x) \leq 0 \quad \forall x \in]0, 1]$$

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad \text{donc } x \geq 1 \quad \text{donc } g(x) \geq g(1)$$

$$\text{D'où } g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

Deuxième partie

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm)

1) a – Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-1}{x}\right) = -\infty$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ la droite d'équation $x = 0$

Est une asymptote verticale à la courbe (C) .

2) a – Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln x = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ ?}$$

(Remarquer que $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{x-1}{x}\right) \frac{\ln x}{x} \quad \forall x \in \mathbb{I}$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{\ln x}{x} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

c – En déduire que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction à déterminer.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

D'où la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

2) a – Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{I}$

$$f'(x) = \left(\left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x\right)'$$

$$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' \ln x + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1+\ln x}{x^2}$$

$$\text{D'où } f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

b – En déduire que g est croissante sur $[1, +\infty[$ et décroissante sur $]0, 1]$.

$$\text{b) On sait que } f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

donc le signe $f'(x)$ est celui de $g(x)$

$$\text{On a } g(x) \leq 0 \quad \forall x \in]0, 1]$$

donc $\forall x \in]0, 1]$

D'où f est décroissante sur $]0, 1]$

$$\text{On a } g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

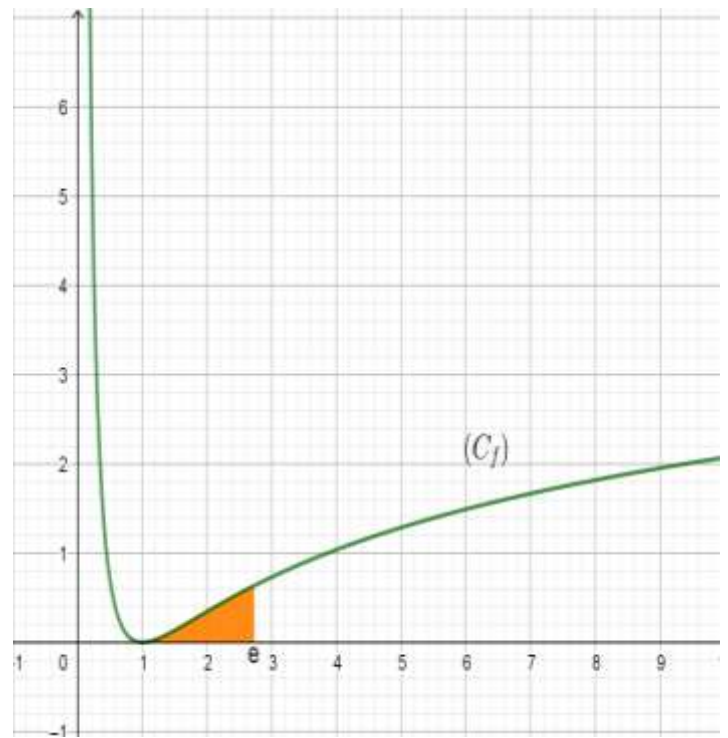
donc $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$

D'où f est croissante sur $[1, +\infty[$

c – Dresser le tableau des variations de f .

| | | | | | |
|---------|-----------|---|-----------|---|-----------|
| X | 0 | 1 | $+\infty$ | | |
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |

3) Construire la courbe (C_f) (on admettra que (C_f) possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 1,5 et 2).



4) a – Montrer que $H: x \rightarrow \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de $h: x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$

$$H'(x) = \frac{1}{2} \left[(\ln x)^2 \right]' = \frac{1}{2} \times 2 \times (\ln x) \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}$$

$$H'(x) = h(x) \quad \forall x \in I$$

D'où $H: x \rightarrow \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de

$$h: x \rightarrow \frac{\ln x}{x} \text{ sur }]0; +\infty[$$

b – Montrer que : $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} \left[(\ln e)^2 - (\ln 1)^2 \right]$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$$

c – A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\int_1^e \ln x dx = 1$$

$$\int_1^e \ln x dx = 1 ?$$

$$f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 1 \quad g(x) = x$$

$$\int_1^e \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e dx$$

$$= e(\ln e) - 1 \ln 1 - [x]_1^e = e - e + 1 = 1$$

$$\int_1^e \ln x dx = 1$$

5) a – Vérifier que : $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} \quad \forall x \in I$

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right) \ln x = \left(1 - \frac{1}{x} \right) \ln x = \ln x - \frac{\ln x}{x}$$

D'où $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} \quad \forall x \in I$

b – Montrer que l'aire du domaine limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est $0,5 \text{ cm}^2$.

On sait que la courbe (C) est au-dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1; e]$

$$A = \int_1^e \ln x - \frac{\ln x}{x} dx \text{ cm} \times \text{cm}$$

$$= \int_1^e \ln x dx \text{ cm}^2 - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \text{ cm}^2$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \right) \text{cm}^2 = \frac{1}{2} \text{cm}^2$$