الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2020
- الموضوع –

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | NS 22F

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

3	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية)	الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ **L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;**
- ✓ **Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;**
- ✓ **L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.**

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	4 points
Exercice 2	Nombres complexes	5 points
Exercice 3	Limites, dérivabilité et calcul intégral	4 points
Problème	Etude d'une fonction numérique	7 points

- ✓ **On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z**
- ✓ **ln désigne la fonction logarithme népérien**

Exercice 1 : (4 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2u_n + 5}$ pour tout n de $I\!N$

0.25	**1) Calculer** u_1
0.5	**2) Montrer par récurrence que pour tout** n **de** $I\!N$ **,** $u_n > 0$
1	**3)a) Montrer que pour tout** n **de** $I\!N$ **,** $0 < u_{n+1} \le \dfrac{2}{5} u_n$ **puis en déduire que pour tout** n **de** $I\!N$ **,** $0 < u_n \le \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$
0.5	**b) Calculer** $\lim u_n$

4) On considère la suite numérique (v_n) **définie par** $v_n = \dfrac{4u_n}{2u_n + 3}$ **pour tout** n **de** $I\!N$ **.**

0.75	**a) Montrer que** (v_n) **est une suite géométrique de raison** $\dfrac{2}{5}$
1	**b) Déterminer** v_n **en fonction de** n **et en déduire** u_n **en fonction de** n **pour tout** n **de** $I\!N$ **.**

Exercice 2 : (5 points)

1) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ **des nombres complexes, on considère l'équation :**

$(E)\ :\ z^2 - 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)z + 16 = 0$

0.5	**a) Vérifier que le discriminant de l'équation** (E) **est** $\Delta = -4\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2$
1	**b) En déduire les solutions de l'équation** (E) **.**

2) Soient les nombres complexes $a = \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ **et** $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

0.75	**a) Vérifier que** $b\overline{c} = a$ **, puis en déduire que** $ac = 4b$
0.5	**b) Ecrire les nombres complexes** b **et** c **sous forme trigonométrique.**
0.5	**c) En déduire que** $a = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ **, on considère les points** B, C **et** D **d'affixes respectives** b **,** c **et** d **telle que** $d = a^4$ **. Soit** z **l'affixe d'un point** M **du plan et** z' **l'affixe de** M' **image de** M **par la rotation** R **de centre** O **et d'angle** $\dfrac{\pi}{12}$

0.5	**a) Vérifier que** $z' = \dfrac{1}{4}az$
0.25	**b) Déterminer l'image du point** C **par la rotation** R
0.25	**c) Déterminer la nature du triangle** OBC **.**
0.75	**d) Montrer que** $a^4 = 128b$ **et en déduire que les points** O **,** B **et** D **sont alignés**

Exercice 3 : (4 points)

On considère la fonction numérique g **définie sur** $]0,+\infty[$ **par** $g(x)=2\sqrt{x}-2-\ln x$

0.5 **1)a) Montrer que pour tout** x **de** $]0,+\infty[$, $g'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

0.5 **b) Montrer que** g **est croissante sur** $[1,+\infty[$

0.5 **c) en déduire que pour tout** x **de** $[1,+\infty[$, $0\le \ln x\le 2\sqrt{x}$ **(remarquer que** $2\sqrt{x}-2\le 2\sqrt{x}$ **)**

1 **d) Montrer que pour tout** x **de** $[1,+\infty[$, $0\le \dfrac{(\ln x)^3}{x^2}\le \dfrac{8}{\sqrt{x}}$ **et en déduire** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$

0.75 **2) a) Montrer que la fonction** $G: x\mapsto x\left(-1+\dfrac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)$ **est une primitive de** g **sur** $]0,+\infty[$

0.75 **b) Calculer l'intégrale** $\int_1^4 g(x)dx$

Problème : (7 points)

On considère la fonction numérique f **définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $f(x)=-x+\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$

et (C) **sa courbe représentative dans un repère orthonormé** $(O,\vec{i};\vec{j})$ **(unité : 2cm)**

0.5 **1) Montrer que** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

0.5 **2) a) Démontrer que la droite** (Δ) **d'équation** $y=-x+\dfrac{5}{2}$ **est une asymptote à la courbe** (C) **au voisinage de** $-\infty$

0.75 **b) Résoudre l'équation** $e^{x-2}-4=0$ **puis montrer que la courbe** (C) **est au dessus de** (Δ) **sur l'intervalle** $]-\infty,2+\ln 4]$ **et en dessous de** (Δ) **sur l'intervalle** $[2+\ln 4,+\infty[$

0.5 **3) Montrer que** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ **puis interpréter géométriquement le résultat**

0.5 **4) a) Montrer que pour tout** x **de** $\mathbb{R}$ $f'(x)=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$

0.25 **b) Dresser le tableau de variations de la fonction** f

0.75 **5) Calculer** $f''(x)$ **pour tout** x **de** $\mathbb{R}$ **puis montrer que** $A(2,2)$ **est un point d'inflexion de** (C)

0.5 **6) Montrer que l'équation** $f(x)=0$ **admet une solution unique** α **telle que** $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$

1 **7) Construire** (Δ) **et** (C) **dans le repère** $(O,\vec{i};\vec{j})$ **ci-dessous (on prend** $\ln 2\simeq 0,7$ **et** $\ln 3\simeq 1,1$**)**

0.5	**8) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur** $\mathbb{R}$
0.75	**b) Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1}** **(remarquer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la première bissectrice du repère)**
0.5	**c) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(2-\ln 3)$ (Remarquer que $f^{-1}(2-\ln 3)=2+\ln 3$)**

./.