Exercices : Étude de fonctions

Exercice 1:

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x + x - 1}{x + e^{-x}}$.
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{(\ln x)^3}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(e^{x^2} - e^{3x} + x^2\right)$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left((\ln x)^3 + x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{2x} + e^{x} + x}{e^{x} - x}$
8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x^2 - 1)}{x - 1}$
9. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 1} + x + 1$.

Exercice 2:

Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

1. $a(x) = \dfrac{x^2 + x\ln x}{x + 1}$ en $+\infty$.
2. $b(x) = \dfrac{xe^{x} + 1}{e^{x} + 1}$ en $\pm\infty$
3. $c(x) = \dfrac{x\ln x + \ln x}{\sqrt{x + 1}}$ en $+\infty$.

Exercice 3:

Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \ln x}{x^2 - 2\ln x} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4 + x} - \sqrt{4 - x}}{x} & \text{si } x \in [-4; 4] \setminus \{0\} \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 4:

Déterminer si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en x_0 (penser à bien déterminer le domaine de définition pour commencer) et le cas échéant, préciser la valeur en x_0 qui rend la fonction continue.

$a(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{2x + 1}$ en $x_0 = -\dfrac{1}{2}$ $\quad b(x) = \dfrac{x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$ en $x_0 = 1$ $\quad c(x) = \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x + 7} - 3}$ en $x_0 = 2$.

Exercice 5:

Soit $f : [0; 1] \to [0; 1]$ continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0; 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 6:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2e^{-x} + 1}$.

Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur une intervalle J à expliciter.

Exercice 7:

Montrer que l'équation $3 - 2x = e^{x}$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$. (On donne : $e \approx 2,718$ et $e^{1/2} \approx 1,648$.)

Exercice 8:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = x + \ln x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur un intervalle que l'on précisera.
2. Justifier que l'équation $x + \ln x = 2005$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$ et que $1997 \leqslant \alpha \leqslant 1998$. (On donne : $\ln 1997 \approx \ln 1998 \approx 7,6$.)

Exercice 9:

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 e^{-x}}{1-e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   (Rappel : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$)

2. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x \ln x}{x-1} & \text{si } x \in]0;+\infty[\setminus \{1\} \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Exercice 10:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x\ln(x^2) - 2x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0 et en donner une interprétation graphique.

Exercice 11:

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   b) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.
2. a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$.
   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   c) Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 12:

1. Soit a un réel et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{a+x}$.

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$ et $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(a+x)^{n+1}}$.

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $g(x) = \dfrac{3x+2}{x^2-4}$.

   Montrer que l'on peut trouver deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ $g(x) = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+2}$ et en déduire la dérivée n-ième de g pour tout entier n.

Exercice 13:

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur ensemble de définition et expliciter leurs dérivées.

1. $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

2. $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

3. $h(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{3}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 14:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = -x^2 + 3x - \ln x$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Étudier la convexité de f et déterminer les coordonnées du ou des points d'inflexion.
3. Déterminer les coordonnées du ou des points de la courbe représentative de f, $\mathcal{C}_f$ présentant une tangente horizontale.
4. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$. (On donne $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ et $\ln 2 \approx 0,7$)

Exercice 15:

Soit la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

1. Montrer que f est bijective. On note f^{-1} sa bijection réciproque. Préciser le domaine de définition de f^{-1}
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse $\dfrac{1}{3}$.
4. Quel est l'ensemble de dérivabilité de f^{-1}
5. La courbe représentative de f^{-1} admet-elle une tangente au point d'abscisse 1 ?
6. Dresser les tableaux de variation de f et f^{-1}.
7. Tracer sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et f^{-1}

Correction

Exercice 1:

1. Par somme de limites $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x + x - 1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x + e^{-x} = 1$ donc par quotient de limites $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x + x - 1}{x + e^{-x}} = -\infty.}$

2. D'après la règle sur les limites des fractions rationnelles on a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = +\infty.}$

3. Effectuons le changement de variable $X = \sqrt{x}$. On a alors $x^4 e^{-\sqrt{x}} = X^8 e^{-X}$. Or lorsque $x \to +\infty$ on a $X \to +\infty$ et d'après les croissances comparées $\lim\limits_{X\to+\infty} X^8 e^{-X} = 0$.

   Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = 0}$

4. $\dfrac{e^{2x}}{(\ln x)^3} = \dfrac{x}{(\ln x)^3} \times \dfrac{e^{2x}}{x}$.

   D'après les croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{(\ln x)^3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x} = +\infty$.

   Donc par produit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{(\ln x)^3} = +\infty.}$

5. $e^{x^2} - e^{3x} + x^2 = e^{x^2}\left(1 - e^{-x^2+3x} + x^2 e^{-x^2}\right)$.

   Par composition de limite $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2+3x} = 0$ et par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - e^{-x^2+3x} + x^2 e^{-x^2}\right) = 1$ et par produit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{x^2} - e^{3x} + x^2) = +\infty.}$

6. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

   Donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left((\ln x)^3 + x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty.}$

7. $\dfrac{e^{2x} + e^x + x}{e^x - x} = \dfrac{x(e^{2x}/x + e^x/x + 1)}{x(e^x/x - 1)} = \dfrac{e^{2x}/x + e^x/x + 1}{e^x/x - 1}$.

   Grâce aux croissances comparée $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}/x + e^x/x + 1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x/x - 1 = -1$.

   Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x} + e^x + x}{e^x - x} = -1.}$

8. Si on pose $f(x) = \ln(2x^2 - 1)$, on remarque que $\dfrac{\ln(2x^2-1)}{x-1} = \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$.

   Comme f est la composée de la fonction ln et d'un polynôme, f est dérivable en 1 donc : $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$. Or $f'(x) = \dfrac{4x}{2x^2-1}$ donc $f'(1) = 4$.

   On a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(2x^2-1)}{x-1} = 4.}$

9.
$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+2x-1} + x + 1 &= \frac{\left(\sqrt{x^2+2x-1} + (x+1)\right)\left(\sqrt{x^2+2x-1} - (x+1)\right)}{\sqrt{x^2+2x-1} - (x+1)} \\
&= \frac{x^2 + 2x - 1 - (x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x-1} - (x+1)} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{x^2+2x-1} - (x+1)}
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x-1}-(x+1)=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x-1}+x+1=0.}$

Exercice 2:

1. – $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2(1+(\ln x)/x)}{x(1+1/x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\dfrac{1+(\ln x)/x}{1+1/x} = +\infty$ car d'après les croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
   – $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+(\ln x)/x}{1+1/x} = 1$
   – $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x)-x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x - x}{1+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x(1-1/\ln x)}{x(1/x+1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x\dfrac{1-1/\ln x}{1+1/x} = +\infty$.
   Donc la courbe représentative de a admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$.
2. – $\lim\limits_{x\to+\infty} b(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xe^x(1+e^{-x}/x)}{e^x(1+e^{-x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\dfrac{1+e^{-x}/x}{1+e^{-x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} b(x) = 1$ car d'après les croissances comparées $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.
   – $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{b(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+e^{-x}/x}{1+e^{-x}} = 1$
   – $\lim\limits_{x\to+\infty} b(x)-x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{1/x-1}{1+1/e^x} = 0$, grâce aux croissances comparées.
   Donc la courbe représentative de b admet en $+\infty$ asymptote d'équation $y=x$ et en $-\infty$ une asymptote d'équation $y=1$.
3. – $\lim\limits_{x\to+\infty} c(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x(1+1/x)}{\sqrt{x}\sqrt{1+1/x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\ln x\dfrac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x}} = +\infty$.
   – $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{c(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\dfrac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x}} = 0$ car d'après les croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$.
   Donc la courbe représentative de c admet une branche parabolique de direction l'axe (Ox).

Exercice 3:

1. – Il faut ici commencer par vérifier que f est bien définie c'est-à-dire qu'il nous faut vérifier que $x^2-2\ln x$ ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$.
   Soit $h(x)=x^2-2\ln x$. h est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $h'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=2\dfrac{x^2-1}{x}$.
   Donc h est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$. h atteint donc son minimum en 1 et comme $h(1)=1$ on a bien $h(x)>0$ pour tout $x>0$.
   – Les fonctions $x\to x$, $x\to x^2$ et $x\to \ln x$ sont continues sur $]0;+\infty[$ donc les fonctions $x\to x+\ln x$ et $x\to x^2-2\ln x$ sont continues sur $]0;+\infty[$. Comme de plus $x^2-2\ln x$ ne s'annule pas sur cet intervalle, f est continue par quotient de fonctions continues sur $]0;+\infty[$.
   – En 0 on a $f(0)=-\dfrac{1}{2}$.
   De plus $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x(x/\ln x+1)}{\ln x(x^2/\ln x-2)} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x/\ln x+1}{x^2/\ln x-2} = -\dfrac{1}{2}$
   On a donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0)$ ce qui signifie que f est aussi continue en 0.

   $\boxed{f \text{ est donc continue sur } \mathbb{R}^+.}$
2. – g est définie sur $[-4,4]$.
   – Les fonctions $x\to x$, $x\to\sqrt{4+x}$ et $x\to\sqrt{4-x}$ sont continues sur $[-4;4]\setminus\{0\}$ donc les fonctions $x\to x$ et $x\to\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}$ sont continues sur $[-4;4]\setminus\{0\}$. Comme de plus x ne s'annule pas sur cet ensemble, g est continue par quotient de fonctions continues sur $[-4;4]\setminus\{0\}$.

– En 0 on a $g(0) = \dfrac{1}{2}$.

De plus $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})} =$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}} = \dfrac{1}{2}$

On a donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$ ce qui signifie que g est aussi continue en 0.

$\boxed{g \text{ est donc continue sur } [-4;4].}$

Exercice 4:

– $\mathcal{D}_a = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ et on voit facilement que a est continue sur $\mathcal{D}_a$.

De plus $\lim\limits_{x\to x_0} a(x) = \lim\limits_{x\to -1/2} \dfrac{(2x+1)(x-1)}{2x+1} = \lim\limits_{x\to -1/2} x-1 = -\dfrac{3}{2}$

$\boxed{\text{Donc } a \text{ est prolongeable par continuité en } -\dfrac{1}{2} \text{ en posant } a(-1/2) = -\dfrac{3}{2}.}$

– Grâce à une division euclidienne on a $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1)$. Donc on a $\mathcal{D}_a = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ et b est bien continue sur $\mathcal{D}_b$.

De plus $\lim\limits_{x\to x_0} b(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(x-1)(x^2-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^2-1} = \pm\infty$

$\boxed{\text{Donc } b \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } 1.}$

– On a $\mathcal{D}_c = [0;2[\cup]2;+\infty[$ et c est bien continue sur $\mathcal{D}_c$. De plus :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} c(x) &= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)(\sqrt{2x}+2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(2x-4)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{2(\sqrt{x+7}+3)}{\sqrt{2x}+2} = 3
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } c \text{ est prolongeable par continuité en 2 en posant } c(2) = 3.}$

Exercice 5:

On pose $g(x) = f(x) - x$. On cherche donc à savoir s'il existe x_0 tel que $g(x_0) = 0$.
Par différence de fonctions continues, g est continue sur $[0;1]$.
De plus $g(0) = f(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ car on sait que $f(1) \in [0;1]$.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe bien $x_0 \in [0;1]$ tel que $g(x_0) = 0$.

$\boxed{\text{Il existe bien } x_0 \in [0;1] \text{ tels que } f(x_0) = x_0.}$

Exercice 6:

– Les fonctions $x \to e^x - e^{-x}$ et $x \to 2e^{-x} + 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et comme $2e^{-x} + 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (exponentielle positive) par quotient de fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R}$.

– f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{4 + e^x + e^{-x}}{(2e^{-x}+1)^2} > 0$.

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{-\infty} f; \lim\limits_{+\infty} f[$.

De plus $\lim\limits_{-\infty} f = -\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[.}$

Exercice 7:

• On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + 2x - 3$.

– f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

– Les fonctions $x \to e^x$ et $x \to 2x - 3$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f; \lim_{+\infty} f[=]-\infty; +\infty[$.

• Comme $0 \in f(\mathbb{R})$, 0 admet un unique antécédent α par f.

Cela signifie qu'il existe un unique réel α tel que $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = -2x + 3$.

• De plus $f(1/2) = e^{1/2} + 1 - 3 = e^{1/2} - 2 < 0$ et $f(1) = e - 1 > 0$. On a donc

$$\begin{aligned}
& f(1/2) \leqslant 0 \leqslant f(1) \\
\Leftrightarrow & f(1/2) \leqslant f(\alpha) \leqslant f(1) \\
\Leftrightarrow & f^{-1}(f(1/2)) \leqslant f^{-1}(f(\alpha)) \leqslant f^{-1}(f(1)) \quad \text{car } f^{-1} \text{ est strictement croissante} \\
\Leftrightarrow & 1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1
\end{aligned}$$

Exercice 8:

1. – f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   – Les fonctions $x \to x$ et $x \to \ln x$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   $\boxed{f \text{ réalise donc une bijection de } \mathbb{R}^{+*} \text{ sur } f(\mathbb{R}^{+*}) =]\lim_{0^+} f; \lim_{+\infty} f[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}.}$

2. On cherche ici à résoudre l'équation $f(x) = 2005$.

   • Comme $2005 \in \mathbb{R} = f(\mathbb{R}^{+*})$, 2005 admet un unique antécédent α par f.

   Cela signifie qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 2005 \Leftrightarrow \alpha + \ln(\alpha) = 2005$.

   • De plus $f(1997) = 1997 + \ln 1997 < 2005$ et $f(1998) = 1998 + \ln 1998 > 2005$. On a donc

$$\begin{aligned}
& f(1997) \leqslant 2005 \leqslant f(1998) \\
\Leftrightarrow & f(1997) \leqslant f(\alpha) \leqslant f(1998) \\
\Leftrightarrow & f^{-1}(f(1997)) \leqslant f^{-1}(f(\alpha)) \leqslant f^{-1}(f(1998)) \quad \text{car } f^{-1} \text{ est strictement croissante} \\
\Leftrightarrow & 1997 \leqslant \alpha \leqslant 1998
\end{aligned}$$

Exercice 9:

1. – f est définie sur $\mathbb{R}$ car $1 - e^{-2x}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.
   – Les fonctions $x \to x^2$, $x \to e^{-x}$ et $x \to e^{-2x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$ donc les fonctions $x \to x^2e^{-x}$ et $x \to 1 - e^{-2x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Comme de plus $1 - e^{-2x}$ ne s'annule pas sur cet ensemble, f est dérivables sur $\mathbb{R}^*$ par quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.
   – En 0 on a $f(0) = 0$. Donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-2x}} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{e^{2x} - 1} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

   On a donc $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ qui est finie donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$

   $\boxed{f \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R}.}$

2. – h est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $x - 1$ ne s'annule pas sur $]0; +\infty[\setminus\{1\}$.
   – On remarque que $\lim_{x \to 1} h(x) = 1 \neq h(0)$ car $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$

   Donc h n'est pas continue en 1 donc ne peut pas être dérivable en 1.

- Les fonctions $x \to x$ et $x \to \ln x$ sont dérivables sur $]0;+\infty[\setminus\{1\}$ donc les fonctions $x \to x\ln x$ et $x \to x-1$ sont dérivables sur $]0;+\infty[\setminus\{1\}$. Comme de plus $x-1$ ne s'annule pas sur cet ensemble, h est dérivables sur $]0;+\infty[\setminus\{1\}$ par quotient de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[\setminus\{1\}$.

$\boxed{h \text{ est donc dérivable uniquement sur }]0;+\infty[\setminus\{1\}.}$

Exercice 10:

1. – Les fonctions $x \to x$ et $x \to \ln(x^2)$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$ donc, par produit et somme, f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
   – On a $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2x\ln|x| - 2x = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} x\ln|x| = 0$.
   Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ ce qui signifie que f est continue en 0.

   $\boxed{f \text{ est donc continue sur } \mathbb{R}.}$
2. Les fonctions $x \to x$ et $x \to \ln(x^2)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$ donc, par produit et somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. On a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \ln(x^2) - 2 = -\infty$.

   Donc f n'est pas dérivable en 0 mais comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$ on peut dire que la courbe représentative de f admet en 0 une tangente verticale.

Exercice 11:

1. a) – Les fonctions $x \to x+1$ et $x \to e^{-1/x}$ sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc, par produit, f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   – On a $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x+1)e^{-1/x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{x} = -\infty$.
   Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ ce qui signifie que f est continue en 0.

   $\boxed{f \text{ est donc continue sur } \mathbb{R}^+.}$

   b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} (x+1)\times\dfrac{1}{x}e^{-1/x} = 0$ car d'après les croissances comparées $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}e^{-1/x} = 0$.

   f est donc dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.
2. Les fonctions $x \to x+1$ et $x \to e^{-1/x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc, par produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus $f'(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-1/x}$.
3. On a $\lim\limits_{x\to +\infty} x+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-1/x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
4. Pour $x > 0$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a donc le tableau de variation suivant :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

Exercice 12:

1. Comme $x+a$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\setminus\{-a\}$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-a\}$ donc pour tout entier n, f est bien de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-a\}$.

   Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$ est vraie pour tout entier n.

   - Pour $n=0$:

     D'une part $f^{(0)}(x)=f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

     D'autre part $\dfrac{(-1)^0 0!}{(x+1)^{0+1}}=\dfrac{1}{x+1}$.

     Donc $\mathcal{P}(0)$ est bien vraie.
   - Soit n un entier fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors :

   $$f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)})'(x)=(-1)^n n!\times\frac{-(n+1)}{(x+a)^{n+2}}=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x+a)^{n+2}}$$

   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie.

   On a donc montré que pour tout entier n, $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$.

2. On a $g(x)=\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}$.

   Donc pour tout entier n, on a

   $$g^{(n)}(x)=2\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}+\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}=\frac{2(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}+\frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$$

Exercice 13:

1. – La fonction $x\to x+1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et la fonction $x\to e^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$.

   Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

   – On a de plus $\lim\limits_{0^+} f=1=f(0)=\lim\limits_{0^-} f$ donc f est continue en 0.

   f est continue sur $\mathbb{R}$.

   – Pour tout $x>0$ on a $f'(x)=1$ et pour tout $x<0$, $f'(x)=e^x$.

   Donc $\lim\limits_{0^+} f'=1=\lim\limits_{0^-} f'$

   D'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\geqslant 0\\ e^x & \text{si } x<0\end{cases}$.

2. Les fonctions $x\to e^x-1$ et $x\to e^x+1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et e^x+1 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Par quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   On a de plus $g'(x)=\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

3. – Les fonctions $x\to x$ et $x\to e^{-3/|x|}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc par produit h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

   – On a de plus $\lim\limits_{0^+} h=0=h(0)=\lim\limits_{0^-} h$ car $\lim\limits_{x\to 0} e^{-3/|x|}=0$. Donc h est continue en 0.

   h est continue sur $\mathbb{R}$.

   – Pour tout $x>0$ on a $h'(x)=\left(1+\dfrac{3}{x}\right)e^{-3/x}$ et pour tout $x<0$, $h'(x)=\left(1-\dfrac{3}{x}\right)e^{3/x}$.

   Donc, grâce aux croissances comparées, $\lim\limits_{0^+} h'=0=\lim\limits_{0^-} h'$