Exercice 1

Etude d'une primitive

$I]$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1) montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

2) a) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\ 1 + (x-1)e^x \geq 0$

b) calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$ et étudier le sens de variation de f

$II]$ On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t}{e^t - 1} dt \ ;\ x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

1) a) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ \dfrac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \dfrac{x^2}{e^x - 1}$

b) déduire que F est continue au point d'abscisse 0

c) montrer que F est dérivable au point 0 et que $F'(0) = 1$

2) a) montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ F'(x) = \dfrac{3 - e^x}{e^x + 1} f(x)$

b) donner le tableau de variation de la fonction F

Exercice 2

Soit F la fonction définie par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{4x} \frac{\ln t}{2t - 1} dt$

1) montrer que F est définie sur $D = \left]0, \dfrac{1}{8}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$

2) montrer F est dérivable sur D et calculer $F'(x)$

3) soit x un élément de $]1, +\infty[$

a) montrer $(\exists c \in [x, 4x])\ F(x) = \dfrac{3x \ln c}{2c - 1}$

b) déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ et déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x}$

4) soit x un élément de $\left]0, \dfrac{1}{16}\right[$. montrer que $|F(x)| \leq -\displaystyle\int_x^{4x} 2 \ln t \, dt$ puis déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t} dt$

1) déterminer le signe de $f(x)$

2) montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$

3) a) montrer que $(\forall x > 1)\ f(x) \geq \dfrac{1}{2} \ln x$ et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) montrer que $\left(\forall x\in\left]0,1\right[\right)\quad f\left(x\right)\leq\frac{1}{2}\ln x$ et calculer $\lim\limits_{x\to0^{+}}f\left(x\right)$

4) donner le tableau de variation de f

5) montrer que $\left(\forall x>1\right)\quad f\left(x\right)\geq\frac{e^{\sqrt{x}}-e}{\sqrt{x}}$ puis déduire la branche infinie de $\left(C\right)$ au voisinage de $+\infty$

Exercice 4

$I\rangle$ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1+x-e^{-x}$

1) a) étudier le sens de variation de g

b) calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ et donner le tableau de variation de g

2) déduire le signe de $g\left(x\right)$ et que $x_0=0$ est l'unique solution de l'équation $g\left(x\right)=0$

$II\rangle$ On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(0)=\frac{1}{2}\ln 2$ et $\forall x>0\quad F\left(x\right)=\int_{x}^{2x}\frac{1}{g\left(t\right)}dt$

1) montrer que $\forall t>0$; $\frac{1}{1+t}\leq\frac{1}{g\left(t\right)}\leq\frac{1}{t}$ et déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

2) a) montrer que $\forall t>0$: $1-t\leq e^{-t}\leq1-t+\frac{t^2}{2}$

b) montrer que $\forall t\in\left]0,4\right[$; $\frac{1}{2t}\leq\frac{1}{g\left(t\right)}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{4-t}\right)$ puis déduire que F est continue à droite de 0

3) a) montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $F'(x)$

b) étudier le sens de variation de F

Exercice 5

$I\rangle$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*}$ par : $f(x)=\frac{e^{-x}}{x}$

1) calculer les limites de f

2) étudier le sens de variation de f

3) étudier les branches infinies de $\left(C_f\right)$

$II\rangle$ On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(x)=\int_{x^2}^{4x^2}f(t)\,dt$; $x>0$ et $F(0)=2\ln 2$

1) a) vérifier que $(\forall x>0)\quad\int_{x^2}^{4x^2}\frac{1}{t}dt=2\ln 2$

b) montrer que $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$: $e^{x}\geq x+1$ et déduire $(\forall t>0)\quad -t\leq e^{-t}-1\leq0$

2) a) montrer que $(\forall x>0)\quad -3x^2\leq F(x)-2\ln 2\leq0$

b) montrer que F est continue , dérivable à droite de 0

3) montrer que $(\forall t\geq1)$: $f(t)\leq e^{-t}$ et déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F\left(x\right)$

4) a) montrer que F F est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et calculer $F'(x)$

b) donner le tableau de variation de F

5) tracer la courbe

Exercice 6

Soit G la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ $\left[0,+\infty\right[$ par : $G\left(x\right)=\int_{x}^{2x}\frac{\ln t}{1+t}dt$; $x>0$ et $G\left(0\right)=0$

1) a) montrer que $\left(\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[\right)$ $\left(\exists c\in\left[x,2x\right]\right)$ $G\left(x\right)=\frac{x\ln c}{1+c}$

b) déduire que $\left(\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[\right)$ $\frac{x\ln x}{1+x}\leq G\left(x\right)\leq\frac{x\ln 2x}{1+2x}$

c) étudier la continuité et la dérivabilité de G à droite de 0

2) On pose $\varphi\left(x\right)=\int_{1}^{x}\frac{\ln t}{1+t}dt$ pour tout x de $\left]0,+\infty\right[$

a) montrer que $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)$ $G\left(x\right)=\varphi\left(2x\right)-\varphi\left(x\right)$

b) montrer que G est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et que $G'\left(x\right)=\frac{\ln x+\left(1+x\right)\ln 4}{\left(1+x\right)\left(1+2x\right)}$

3) a) montrer que $\left(\forall x>1\right)$ $\left(\exists d\in\left]x,2x\right[\right)$ $G\left(x\right)=\frac{x\ln d}{1+d}$ (utiliser le théorème des accroissements finis)

b) montrer que $\left(\forall x>1\right)$ $\frac{x\ln x}{1+2x}\leq G\left(x\right)\leq\frac{x\ln 2x}{1+x}$

c) calculer $\lim_{x\to+\infty}G\left(x\right)$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{G\left(x\right)}{x}$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{G\left(x\right)}{x}$ donner une interprétation géométrique du résultat

4) on pose $h\left(x\right)=\ln x+\left(x+1\right)\ln 4$

a) montrer que $h\left(x\right)=0$ admet un unique solution α et que l'on a $\frac{1}{6}<\alpha<\frac{1}{4}$

b) déduire le signe de $h\left(x\right)$ puis dresser le tableau de variation de G

Exercice 7

Soit F la fonction définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $F\left(x\right)=\int_{1}^{x}e^{-\frac{1}{t}}\ln t\,dt$

1) a) montrer que $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$ $e^{-x}\geq 1-x$ et déduire $\left(\forall t\geq 1\right)$ $e^{-\frac{1}{t}}\ln t\geq\ln t-\frac{\ln t}{t}$

b) calculer $I=\int_{1}^{x}\ln t\,dt$ et déduire $\left(\forall x>1\right)$ $F\left(x\right)\geq x\ln x-x+1-\frac{1}{2}\left(\ln x\right)^{2}$

2) montrer que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln x\right)^{2}}{x}=0$ puis déduire $\lim_{x\to+\infty}F\left(x\right)$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{F\left(x\right)}{x}$

3) montrer que F est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et calculer la dérivée $F'\left(x\right)$