

## Exercice 1

Soit  $F$  la fonction définie sur  $]1, +\infty[$  par :  $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$  ;  $x > 1$  et  $F(1) = \ln 2$

1) on considère  $f$  la fonction définie sur  $]1, +\infty[$  par :  $f(t) = \frac{t-1}{\ln t}$  ;  $x > 1$  et  $f(1) = 1$

a) montrer que  $f$  est continue sur  $]1, +\infty[$

b) en utilisant le théorème des accroissements finis montrer que  $\forall t \in ]1, +\infty[ \ln t \geq \frac{t-1}{t}$

c) étudier les variations de  $f$

2) a) montrer que  $(\forall x > 1) I(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = \ln 2$

b) montrer que  $(\forall x \in ]1, +\infty[) 0 \leq F(x) - I(x) \leq \frac{1}{2}(x^2 - 1)$

c) en déduire que  $F$  est continue à droite de  $x_0 = 1$

3) a) montrer que  $(\forall x \in ]1, +\infty[) \frac{1}{2} \frac{x^2 - x}{\ln x} \leq F(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln x}$  déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

b) étudier la branche infinie de  $(C)$  la courbe de  $F$

4) a) montrer que  $F$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et  $F'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$

b) montrer que  $F$  est dérivable à droite de 1 et déterminer le nombre dérivé

c) étudier le sens de variation de  $F$  et dresser le tableau de variations

## Exercice 2

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :  $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$  ;  $x \neq 0$  et  $f(0) = \ln 2$

1) calculer  $\int_x^{2x} \frac{dt}{t}$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^{+*}$  puis montrer que  $f$  est continue à droite de  $x_0 = 0$

2) a) prouver que  $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) f(x) \geq \frac{e^{2x} - e^x}{2x}$

b) calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et étudier la branche infinie de  $(C_f)$  en  $+\infty$

3) a) montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et calculer  $f'(x)$

b) étudier les variations de  $f$

4) a) montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{e^t - 1}{t} dt$

b) montrer que la fonction  $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$  est croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$

c) en déduire que  $f$  est dérivable à droite de  $x_0 = 0$  et  $f'_d(0) = 1$

5) tracer la courbe  $(C_f)$