

2)  $I = ]-\infty, 0]$  ;  $f(x) = 5 - x^2$

3)  $I = \mathbb{R}^+$  ;  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$

\*\*\*

**Corrigé de l'exercice 1 :**

a.  $f(x) = x^2 + 4x - 5$

$D_f = \mathbb{R}$  ( car  $f$  est une fonction polynôme )

b.  $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$

c.  $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 9}$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 9 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / (x-3)(x+3) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x-3 \neq 0 \text{ et } x+3 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 3 \text{ et } x \neq -3\} \\ &= \mathbb{R} - \{-3, 3\} \\ &= ]-\infty, -3[ \cup ]-3, 3[ \cup ]3, +\infty[ \end{aligned}$$

d.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \geq 0\} = \mathbb{R}$  ( car pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , on a :  $x^2 + 1 > 0$  )

e.  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 5}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 5 \geq 0\}$

Etudions le signe du polynôme  $x^2 + x + 5$  :

On a :  $\Delta = 1^2 - 4(1)(5) = -19 < 0$

$x$	$-\infty$ $+\infty$
$x^2+x+5$	+

D'où :  $D_f = \mathbb{R}$

f.  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \text{ et } x \neq 1\} \\ &= [0, 1[ \cup ]1, +\infty[ \end{aligned}$$

g.  $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x - 2 \geq 0\}$$

Étudions le signe du polynôme  $x^2 - x - 2$  :

On a :  $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 9 > 0$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2(1)} & , & \quad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2(1)} \\ x_1 &= -1 & , & \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$	
$x^2 - x - 2$	+	0	-	0	+

Donc :  $D_f = ]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$

h.  $f(x) = 3 - \sqrt{2 - x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2 - x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\} = ]-\infty, 2]$$

i.  $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 6x + 5 > 0\}$$

Étudions le signe du polynôme  $x^2 - 6x + 5$  :

On a :  $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(5) = 16 > 0$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-6) - \sqrt{16}}{2(1)} & , & \quad x_2 = \frac{-(-6) + \sqrt{16}}{2(1)} \\ x_1 &= 1 & , & \quad x_2 = 5 \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$1$	$5$	$+\infty$	
$x^2 - 6x + 5$	+	0	-	0	+

Donc :  $D_f = ]-\infty, 1[ \cup ]5, +\infty[$

j.  $f(x) = \frac{1}{x-2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2\} = ]-\infty, 2[ \cup ]2, +\infty[$$

**Corrigé de l'exercice 2 :**

$$f(x) = x^2 + x - 2$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

- ▷ On a :  $f(0) = -2$  donc  $O(0,0) \notin (C_f)$
- ▷ On a :  $f(0) = -2$  donc  $A(0,-2) \in (C_f)$
- ▷ On a :  $f(-2) = 0$  donc  $B(-2,0) \in (C_f)$
- ▷ On a :  $f(1) = 0$  donc  $C(1,1) \notin (C_f)$
- ▷ On a :  $f(2) = 4$  donc  $D(2,7) \notin (C_f)$
- ▷ On a :  $f(1) = 0$  donc  $E(1,0) \in (C_f)$

**Corrigé de l'exercice 3 :**

$$\triangleright f(x) = -x^3 + 2x|x|$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

- $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = -(-x)^3 + 2(-x)|-x| = x^3 - 2x|x| = -(-x^3 + 2x|x|) = -f(x)$

$$\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } \begin{cases} -x \in \mathbb{R} \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

D'où  $f$  est une fonction impaire.

$$\triangleright f(x) = x^4 - 3|x|$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

- $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = (-x)^4 - 3|-x| = x^4 - 3|x| = f(x)$

$$\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } \begin{cases} -x \in \mathbb{R} \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

D'où  $f$  est une fonction paire.

$$\triangleright f(x) = -2x^3 + 5x - 2$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\circ f(2) = -8$$

$$\circ f(-2) = 4$$

$$\circ -f(2) = 8$$

▪ Puisque  $f(-2) \neq f(2)$  alors  $f$  n'est pas paire

▪ Puisque  $f(-2) \neq -f(2)$  alors  $f$  n'est pas impaire

### Corrigé de l'exercice 4 :

1) Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $\mathbb{R}$ , tels que  $a < b$  :

$$f(a) - f(b) = (3a - 4) - (3b - 4) = 3a - 3b = 3(a - b)$$

Puisque  $a < b$  alors  $a - b < 0$

$$\text{Donc } 3(a - b) < 0$$

$$\text{Donc } f(a) - f(b) < 0$$

$$\text{Donc } f(a) < f(b)$$

Et par suite  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2) Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $]-\infty, 0]$ , tels que  $a < b$  :

$$\text{On a } a < b$$

$$\text{Donc } a^2 > b^2 \quad (\text{car } a \text{ et } b \text{ sont négatifs})$$

$$\text{Donc } -a^2 < -b^2$$

$$\text{Donc } 5 - a^2 < 5 - b^2$$

$$\text{Donc } f(a) < f(b)$$

Et par suite  $f$  est strictement croissante sur  $]-\infty, 0]$ .

3) Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $\mathbb{R}^+$ , tels que  $a < b$  :

$$\text{On a } a < b$$

$$\text{Donc } \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

$$\text{Donc } \sqrt{a} + 1 < \sqrt{b} + 1$$

$$\text{Donc } \frac{1}{\sqrt{a} + 1} > \frac{1}{\sqrt{b} + 1}$$

$$\text{Donc } \frac{2}{\sqrt{a+1}} > \frac{2}{\sqrt{b+1}}$$

$$\text{Donc } f(a) > f(b)$$

Et par suite  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

つづく