Généralités sur les fonctions

Vocabulaire

Soit D un ensemble de R
Définir une fonction f sur D, c'est associer à chaque réel x de D un unique réel noté f(x).
On écrit : $f : x \mapsto f(x)$ (on lit : « f est la fonction qui à x associe f de x »)
D est l'ensemble de définition de la fonction f.
x est la variable.
f(x) est l'image de x par f.
Si y = f(x) , on dit que x est un antécédent de y par f.

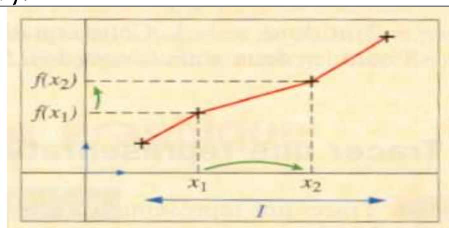
Représentation graphique

Un repère du plan étant choisi, on appelle courbe représentative d'une fonction f, notée C_f , l'ensemble des points M de coordonnées (x ; f(x)) où $x \in D$.
Dire « M(x ; y) appartient à la courbe représentative de f » équivaut à dire « x appartient à D et y = f(x) ».
On dit que la courbe a pour équation y = f(x).

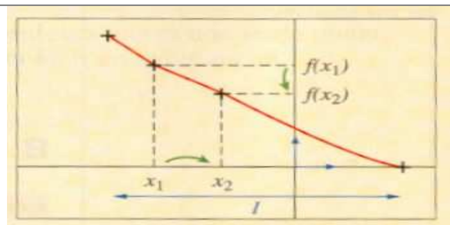
Sens de variations

I est un intervalle contenu dans l'ensemble de définition D de la fonction f.

Dire que f est strictement croissante sur I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I :
Si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$.
(Une fonction croissante conserve l'ordre.)



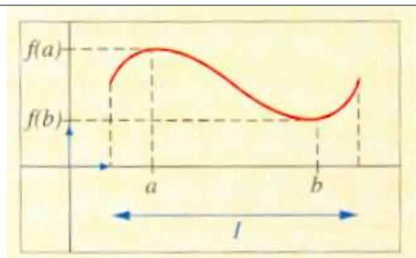
Dire que f est strictement décroissante sur I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I :
Si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$.
(Une fonction décroissante change l'ordre.)



Pour une fonction croissante ou décroissante, on remplace les inégalités strictes de $f(x_1)$ et $f(x_2)$.par des inégalités larges.
Dire que f est constante sur I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I , on a $f(x_1) = f(x_2)$.
Une fonction monotone sur I est une fonction soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

Maximum - Minimum

M est le maximum de f sur I signifie que M est la plus grande valeur prise par f sur I :
Pour tout réel x de I
$f(x) \leq M = f(a)$.



m est le minimum de f sur I signifie que m est la plus petite valeur prise par f sur I :
Pour tout réel x de I
$f(x) \geq m = f(b)$.

Parité

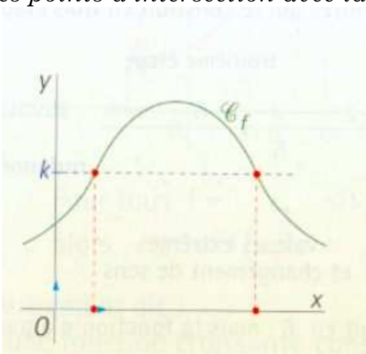
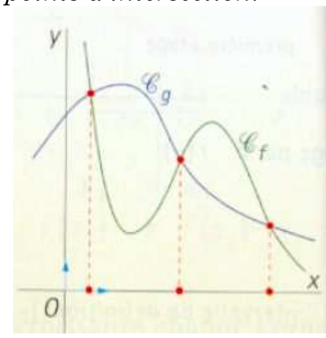
Fonction paire

On dit que f est paire si pour tout x de D, on a : $(-x) \in D$ et $f(-x) = f(x)$.
Soit C la courbe représentative d'une fonction f.
C est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

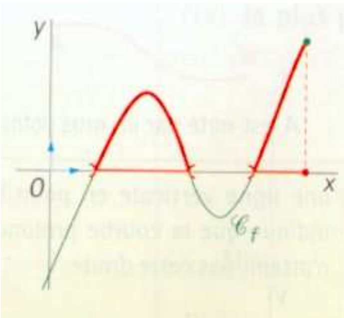
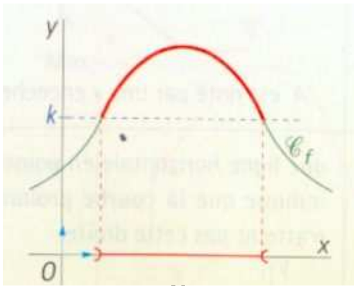
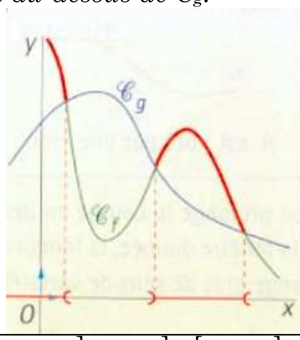
Fonction impaire

g est impaire si pour tout x de D on a : $-x \in D$ et $g(-x) = - g(x)$.
Soit C la courbe représentative d'une fonction g.
C est symétrique par rapport à O.

Résolution d'une équation :

Résolution f(x) = k.	*Résolution de f(x) = g(x).*
On trace la droite d'équation y = k et on lit les abscisses des points d'intersection avec la courbe. 	*On trace les deux courbes C_f et C_g et on lit les abscisses des points d'intersection.* 
$S = \{x_1, x_2\}$	$S = \{x_1, x_2, x_3\}$

Résolution d'une inéquation

Résolution f(x) ≥ 0.	*Résolution f(x) ≥ k.*	*Résolution de f(x) ≥ g(x).*
On lit les intervalles sur lesquels la courbe est au-dessus des axes des abscisses. 	*On trace la droite d'équation y = k et on lit les intervalles sur lesquels la courbe est au-dessus de cette droites.* 	*On trace les deux courbes C_f et C_g et on lit les intervalles sur lesquels C_f est au-dessus de C_g.* 
$S = [x_1, x_2] \cup [x_3, +\infty[$	$S = [x_1, x_2]$	$S =]-\infty, x_1] \cup [x_2, x_3]$

Fonctions de références : parabole-hyperbole

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthogonal .

Parabole

**)La courbe représentative de la fonction f définie sur R par $f(x)=ax^2$,$a\neq 0$ est une parabole de sommet O et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 0$.*

**) La courbe représentative de la fonction f définie sur R par $f(x)=a(x-\beta)^2$,$a\neq 0$ est une parabole de sommet $S(\alpha,0)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.*

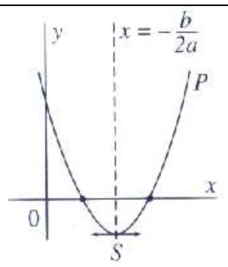
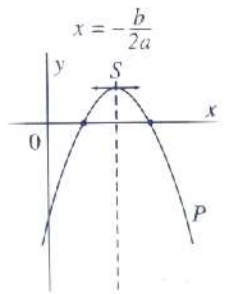
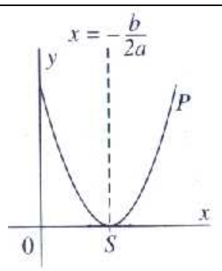
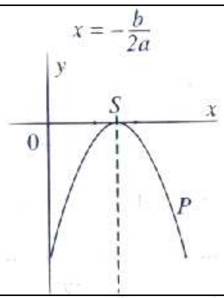
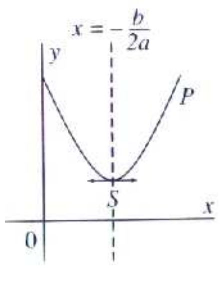
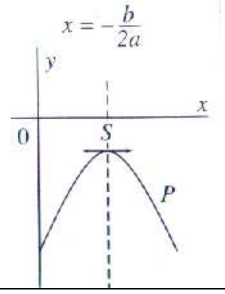
**) La courbe représentative de la fonction f définie sur R par $f(x)=x^2+\beta$,$a\neq 0$ est une parabole de sommet $S(0,\beta)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 0$.*

**)La fonction f définie sur R par $f(x)=ax^2+bx+c$,$a\neq 0$,*

f(x) peut s'écrire sous la forme $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$,$a\neq 0$

Donc la courbe représentative de f est une parabole de sommet $S(\alpha,\beta)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x=\alpha$.

Soit le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

	$a > 0$	$a<0$
$\Delta < 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta > 0$		

Hyperbole

**) La courbe représentative de la fonction $f(x)=\frac{a}{x}$, $a\neq 0$ est une hyperbole de centre O et d'asymptotes les droites d'équations $x=0$ et $y=0$.*

**) La courbe représentative de la fonction $f(x)=\frac{1}{x}+\beta$ est une hyperbole de centre $I(0,\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=0$ et $y=\beta$.*

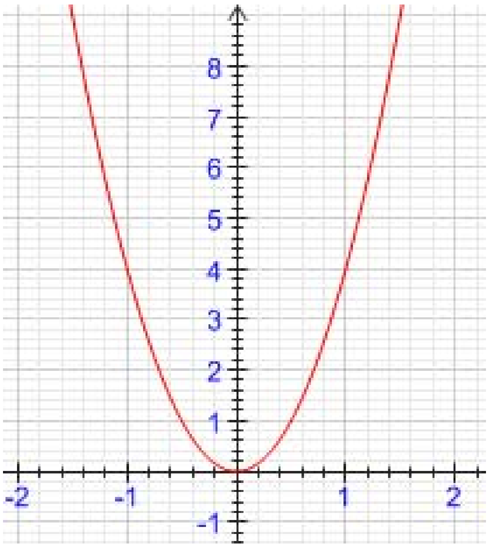
**) La courbe représentative de la fonction $f(x)=\frac{a}{x+\alpha}$, $a\neq 0$ est une hyperbole de centre $I(-\alpha,0)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=-\alpha$ et $y=0$.*

*) *La courbe représentative de la fonction* $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c\neq 0$ *est une hyperbole de centre* $I\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$ *et d'asymptotes les droites d'équations* $x=-\dfrac{d}{c}$ *et* $y=\dfrac{a}{c}$.

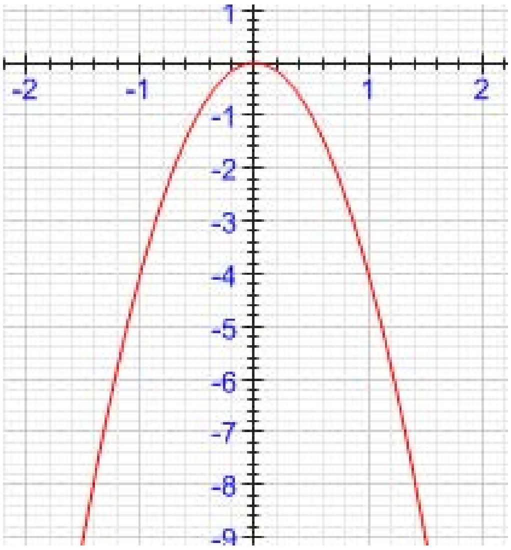
Exemples (tous les cas possibles)

$$g:\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2\end{array}\ ;\ a\neq 0$$

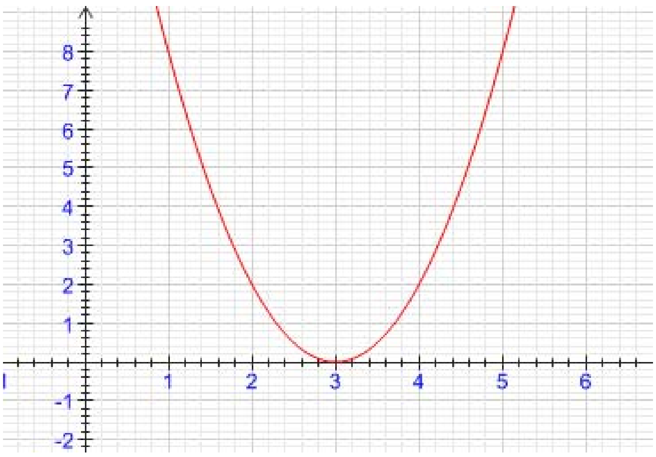
$Si\ a>0$ (exemple $a=4$)



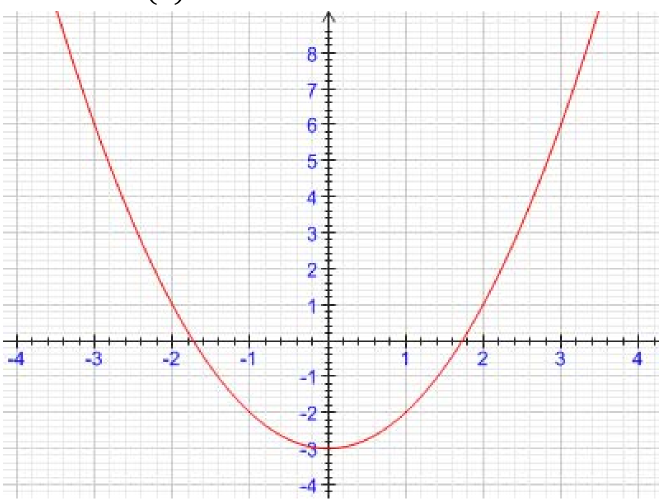
$Si\ a<0$ (exemple $a=-4$)



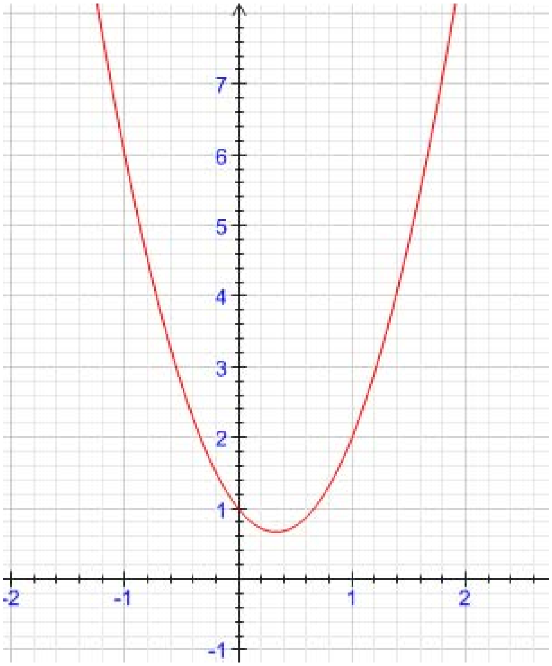
$h(x)=2(x-3)^2$



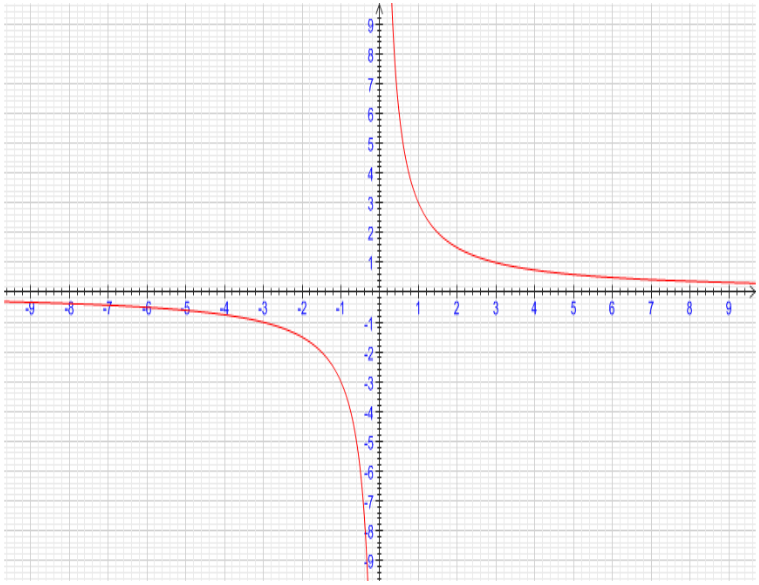
$k(x)=x^2-3$



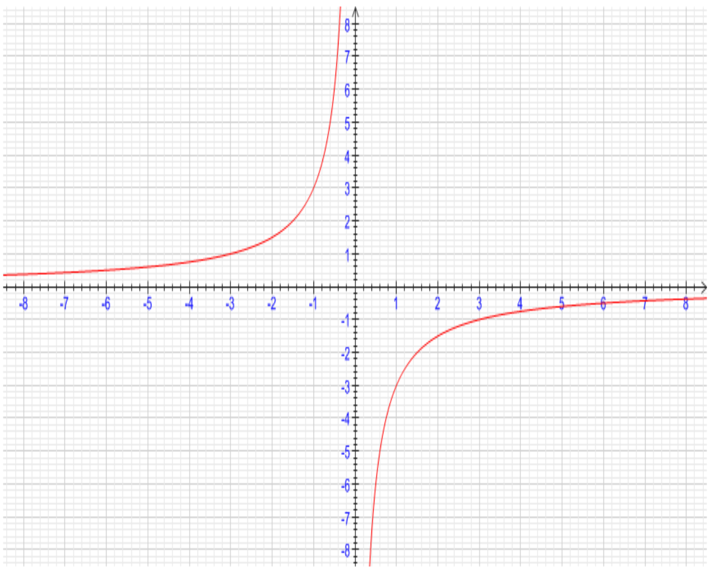
$p(x) = 3x^2 - 2x + 1$



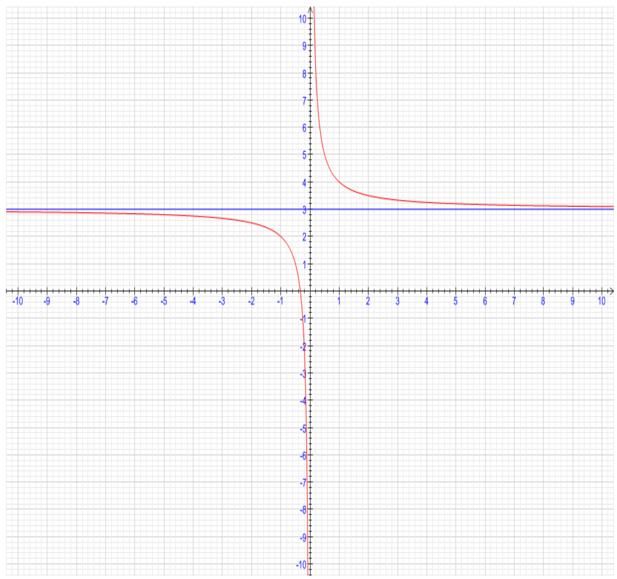
$(exemple\ g(x) = \frac{3}{x}\ )$



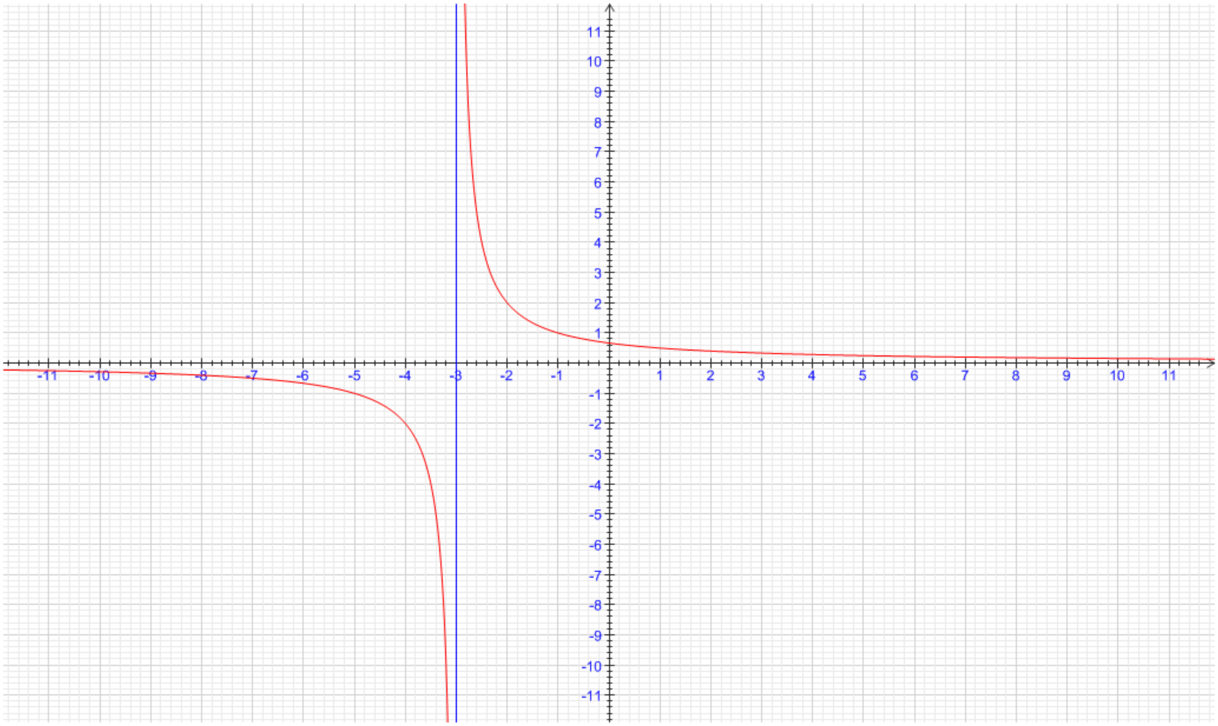
$(exemple\ g(x) = \frac{-3}{x}\ )$



$(exemple\ h(x) = \frac{1}{x} + 3\ )$



$(exemple\ k(x) = \frac{2}{x+3}\ )$



$(exemple\ p(x) = \frac{2x+5}{4x-3}\ )$