Professeur : Rachid BELEMOU Lycée : Oued Eddahab	Cours Généralités sur les fonctions	Niveau : TCT - BIOF Année : 2017-2018

I Définition d'une fonction

Activité 1 :

Dans une boutique de vente d'un article unique, coûte 45 Dhs, avec prix de livraison fixe de 20 Dhs quelque soit le nombre d'articles ou la distance.
On note :
x : le nombre d'articles achetés.
$f(x)$: le prix total a payé qui dépend de x.
1- Déterminer la relation entre $f(x)$ et x.(On peut dire "Déterminer $f(x)$ en fonction de x").
2- Quel est le prix à payer pour 7 articles ?
3- Calculer $f(3)$ et $f(25)$.
4- Quel est le nombre de produits qu'on peut acheter à 425 Dhs?

Définition: *Une fonction f est un procédé qui permet d'associer à tout nombre x, élément d'un ensemble E, un nombre unique noté $f(x)$.*
L'élément x de E est appelé la variable.
Le nombre $f(x)$ est l'image de x par la fonction f.
Si x vérifie $f(x) = y$, on dit que x est un antécédent de y.

Ex: *Soit la fonction définie sur l'intervalle $[-3; 5]$ par l'expression : $f(x) = x^2 - x + 2$.*
L'ensemble de définition est $[-3; 5]$.
Le nombre 4 a pour image $f(4) = 14$.
On calcule $f(0) = 2$ et $f(1) = 2$. Ainsi 0 et 1 sont deux antécédents de 2 par f.

Ex: *Soit la fonction $f : x \to x^2 - x$*
Déterminer l'image de -5 ; 0 ; 3 et 10, puis rechercher les antécédents de 0.

II Ensemble de définition d'une fonction

1 Définition

Définition: *On appelle ensemble de définition de la fonction f l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable x dans le calcul de $f(x)$.*

Ex: *Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-1; 6]$ par l'expression $f(x) = 3x^2 - 1$.*
L'ensemble de définition de f est $[-1; 6]$; pour tout nombre x de $[-1; 6]$ le nombre $f(x)$ existe.

Ex: *Soit la fonction g définie par l'expression $g(x) = {}^1\!/_x$.*
Pour pouvoir calculer $g(x)$, le nombre x ne doit pas être égal à zéro.
L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ex: *Soit la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}$.*
Pour pouvoir calculer $h(x)$, le nombre x ne doit pas être négatif.
L'ensemble de définition de h est donc $]0; +\infty[$.

Exercice 1 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x+3} \; ; \quad g : x \mapsto \frac{1}{x^2-9} \; ; \quad h : x \mapsto \frac{1}{x^2-x} \; ; \quad j : x \mapsto \frac{1}{(x-3)(x+7)}$$

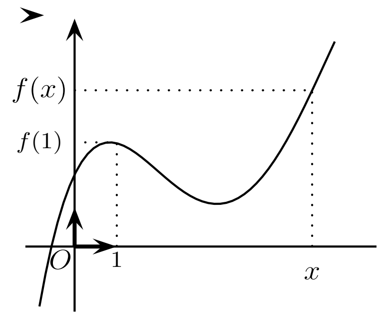
$$k : x \mapsto \sqrt{x-2} \; ; \quad l : x \mapsto \frac{\sqrt{x+3}}{x-2} \; ; \quad m : x \mapsto \sqrt{(x-1)(x-5)}$$

III Courbe représentative d'une fonction

1- Définition:

On appelle courbe représentative (ou représentation graphique) de la fonction f l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x, f(x))$, où x parcourt l'ensemble de définition E de f.

En d'autres termes, le point $M(x; y)$ est sur la courbe représentative de la fonction f si et seulement si $y = f(x)$.



Ex: *Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.*

$A(1, 2)$ est sur la courbe de f, car $f(1) = 2$.

$B(-3, 34)$ est sur la courbe de f, car $f(-3) = 34$.

$C(2, 4)$ n'est pas sur la courbe de f, car $f(2) = 9$ /

Exercice 2 On sait que la fonction f vérifie les conditions suivantes :

- son ensemble de définition est $D = [-5; 4]$;
- les nombres -4 et 4 ont la même image 3 ;
- les solutions de l'équation $f(x) = -2$ sont 1 et 2 ;
- le nombre -5 est un antécédent de 0 par f ;
- $f(-2) = -1$, $f(0) = -3$ et $f(3) = 0,5$.

Tracer une courbe pouvant représenter la fonction f.

IV- Quelques cas particuliers

1 Les fonctions paires

Definition :
On note f une fonction et D_f son domaine de definition.
On dit que f est paire si et seulement si, les deux conditions ci-dessous sont verifiees :
▷ Si $x \in \mathbb{D}_f$ alors $-x \in D_f$ (tout nombre de D_f a son opposé dans D_f)
▷ Pour tout $x \in D_f$ alors $f(-x) = f(x)$ (un nombre et son opposé ont la meme image)

Graphiquement cela se traduit par le fait que : $\mathcal{C}_f$ est symetrique par rapport à l'axe des ordonnees.

Exemple :
On note f : x → −x2 + 4, montrer que f est paire

2 Les fonctions impaires

Definition :
On note f une fonction et D_f son domaine de definition.
On dit que f est impaire si et seulement si, les deux conditions ci-dessous sont verifiees :
▷ Si $x \in \mathbb{D}_f$ alors $-x \in D_f$ (tout nombre de D_f a son opposé dans D_f)
▷ Pour tout $x \in D_f$ alors $f(-x) = -f(x)$ (un nombre et son opposé ont des images opposees)

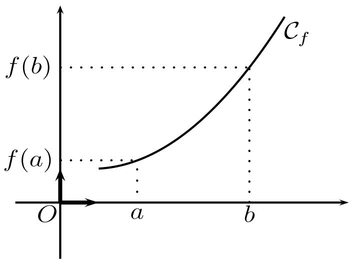
Graphiquement cela se traduit par le fait que : $\mathcal{C}_f$ est symetrique par rapport à l'origine du repere.

Exemple :
On note $f : x \longmapsto -x^3$, montrer que f est impaire

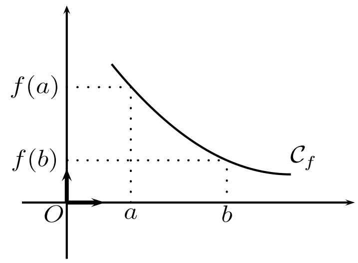
IV Sens de variation des fonctions

1 Définition

Définition: *On dit qu'une fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle E lorsqu'elle conserve (respectivement inverse) l'ordre sur cet intervalle.*
Cela signifie que, pour tout couple (a,b) d'éléments de E, si $a < b$ alors, $f(a) \leq f(b)$ (respectivement $f(a) \geq f(b)$).



Pour tout couple (a, b) tel que $a < b$,
$f(a) < f(b)$: la fonction f est croissante.



Pour tout couple (a, b) tel que $a < b$,
$f(a) > f(b)$: la fonction f est décroissante.

Ex: *Soit la fonction affine f définie par : $f(x) = -3x + 2$* . Déterminer le sens de variation de f

2 Etude du sens de variation de fonctions

Activité :

• Soit la fonction g définie par $g(x) = 3x^2 - 2$. Montrer que g est décroissante sur $\mathbb{R}^-$, et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

• Résumer ces résultats dans un tableau de variation :

Définition: *On dit qu'une fonction f est monotone sur un intervalle I lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante sur cet intervalle.*

Ex: *La fonction g précédente est monotone sur $]-\infty; 0]$ et sur $[0; +\infty[$.*
Par contre, g n'est pas monotone sur $]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit la fonction g définie par l'expression $g(x) = -3x^2 + 2$.

-Determiner le sens de variation de g sur les intervalles $]-\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$.

-Donner alors le tableau de variation de la fonction g.

V Maximum et minimum d'une fonction

Définition: *On appelle maximum de f, lorsqu'il existe, le nombre $f(a)$ tel que : pour tout nombre réel x de E, $f(x) \leq f(a)$.*
On appelle minimum de f, lorsqu'il existe, le nombre $f(b)$ tel que : pour tout nombre réel x de E, $f(x) \geq f(b)$.

Propriété: *Si une fonction f est croissante sur l'intervalle $[a; b]$, et décroissante sur l'intervalle $[b; c]$, alors elle admet sur l'inter-valle $[a; c]$ un maximum, atteint en $x = b$ et égal à $f(b)$.*

x	a		b		c
f		$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	

Demonstration : f est croissante sur $[a; b]$, donc pour tout $x \in [a; b]$, on a $f(x) \leq f(b)$.
De même, f est décroissante sur $[b; c]$, donc pour tout $x \in [b; c]$, on a $f(x) \leq f(b)$.
Finalement, $f(x) \leq f(b)$ pour tout $x \in [a; c]$.

Propriété: *Si une fonction f est décroissante sur l'intervalle $[a; b]$, et crois- sante sur l'intervalle $[b; c]$, alors elle admet sur l'intervalle $[a; c]$ un minimum atteint pour $x = b$ et égal à $f(b)$.*

x	a		b		c
f		$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	

Exercice 4 Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[-10; 10]$ par l'expression $g(x) = (x-2)^2+3$.

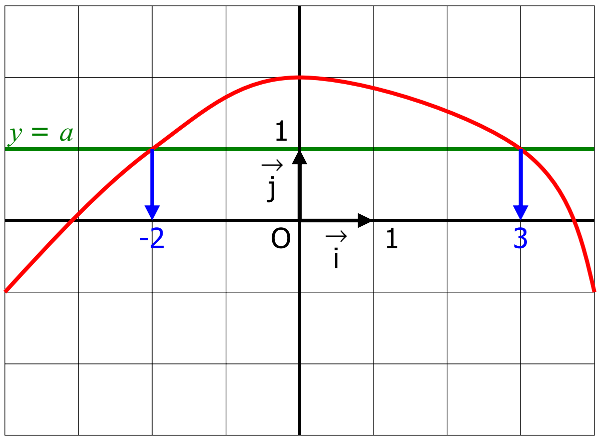
1. Etudier le sens de variation de g sur les intervalles $[-10; 2]$ et $[2; 10]$.
   Donner le tableau de variation de g.
2. Déterminer le minimum de g.

VI. RESOLUTIONS GRAPHIQUES

1. Equation /inéquation du type $f(x) = b$ ou $f(x) > b$ (Exemple)

On a représenté la courbe C_f représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [-4 ; 4].

Résolution d'une équation

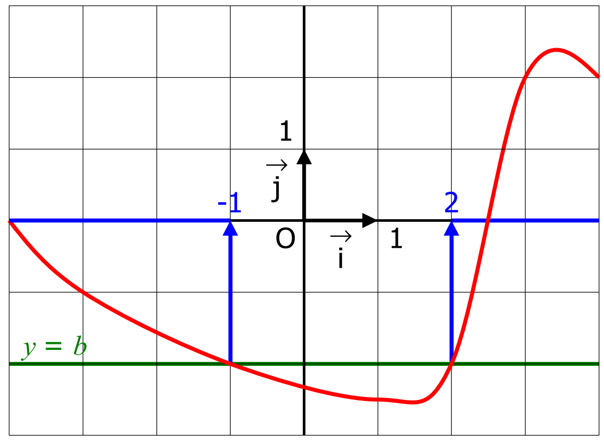


Résoudre l'équation $f(x) = a$ revient à chercher les nombres qui ont pour image a.

Graphiquement, cela revient à chercher l'abscisse des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = a$.

S = {-2 ; 3}

Résolution d'une inéquation



Résoudre l'inéquation $f(x) > b$ revient à chercher les nombres qui ont une image supérieure à b.

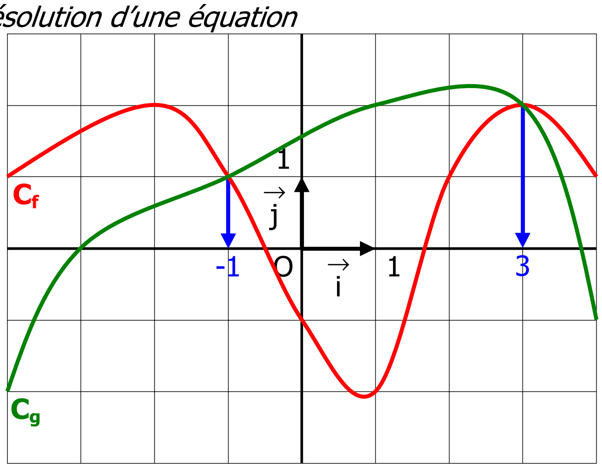
Graphiquement, cela revient à chercher l'abscisse des points de la courbe situés « au dessus » de la droite d'équation $y = b$.

S = [-4 ; -1[$\cup$]2 ; 4]

2. Equation /inéquation du type $f(x) = g(x)$ ou $f(x) > g(x)$ (Exemple)

On a représenté les courbe C_f et C_g représentant eux fonctions f et g définies sur l'intervalle [-4 ; 4].

Résolution d'une équation

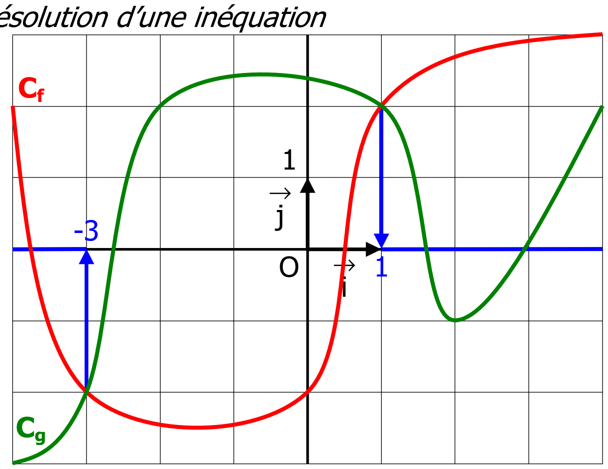


Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ revient à chercher les nombres qui ont la même image par f et par g.

Graphiquement, cela revient à chercher l'abscisse des points d'intersection de la courbe C_f coupe la courbe C_g.

S = {-1 ; 3}

Résolution d'une inéquation



Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$ revient à chercher les nombres dont l'image par f est supérieure à l'image par g.

Graphiquement, cela revient à chercher l'abscisse des points pour lesquels de la courbe C_f est au dessus la courbe C_g.

S = [-4 ; -3[$\cup$]1 ; 4]