Tronc Commun

Série 2 : Etude de Fonctions

Exercice 1 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{-10x}{1+x^2}$

1. Montrer que la fonction f est impaire
2. Montrer que 5 est une valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$
3. a) Soient a *et* b deux réels distincts , montrer que : $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{10(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)}$

   b) En déduire la monotonie de la fonction f sur $[0,1]$ et $[1,+\infty[$
4. Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{x}{x-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2. Etudier la monotonie de f sur les intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$
3. Dresser le tableau de variation de f
4. Comparer les deux nombres : $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ *et* $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Exercice 3 :

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x)=x^2-2x$ et $g(x)=\frac{x}{x-2}$

1. Déterminer D_g et vérifier que pour tout x de D_g : $g(x)=1+\frac{2}{x-2}$
2. Donner les tableaux de variations de f et g
3. Déterminer les points d'intersection de (C_f) et (C_g) avec les axes du repère
4. Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
5. Déterminer algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)
6. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\leq g(x)$
7. Soit h la fonction définie par : $h(x)=\frac{|x|}{|x|-2}$

   a) Déterminer D_h

   b) Montrer que la fonction h est paire

   c) Vérifier que $h(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+ - \{2\}$
   d) Tracer la courbe (C_h) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
8. Soit k la fonction définie par : $k(x) = |f(x)|$
   a) Tracer la courbe (C_k) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
   b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $k(x) = m$

Exercice 4 :

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = \dfrac{3x-3}{x+1}$

1. Déterminer D_g et vérifier que pour tout x de D_g : $g(x) = 3 - \dfrac{6}{x+1}$
2. Donner les tableaux de variations de f et g
3. Déterminer les points d'intersection de (C_f) et (C_g) avec les axes du repère
4. Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
5. Déterminer algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)
6. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$
7. Soit h la fonction définie par : $h(x) = \dfrac{3|x|-3}{|x|+1}$
   a) Déterminer D_h
   b) Montrer que la fonction h est paire
   c) Vérifier que $h(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$
   d) Tracer la courbe (C_h) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
8. Soit k la fonction définie par : $k(x) = |f(x)|$
   a) Tracer la courbe (C_k) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
   b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $k(x) = m$

***