PRODUIT SCALAIRE

Leçon : PRODUIT SCALAIRE
Présentation globale

La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877), ci-contre.
Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.

I) Le produit scalaire de deux vecteurs

1° Définitions

Définition1 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Et soient A ; B et C trois points du plan tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel définit par :

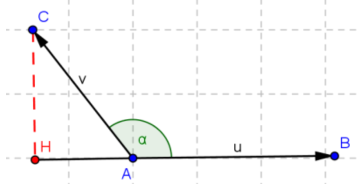
Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v}=0$

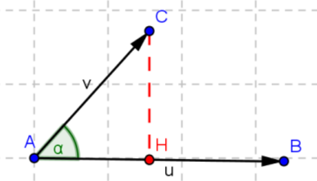
Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ alors soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et alors

$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overline{AH}\times\overline{AB}$ c a d

$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AH\times AB$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens

$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AH\times AB$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont un sens contraire





Remarque :

soient A ; B ; C et D quatre points du plan

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overline{A'B'}\times\overline{CD}=\overline{AB}\times\overline{C'D'}$ avec

A' ; B' les projections orthogonales respectifs de A ; B sur la droite (CD)

Et C' ; D' les projections orthogonales respectifs de C et D sur la droite (AB)

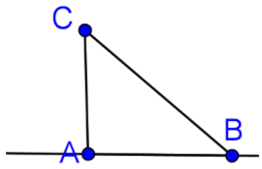
Application : Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A et direct et $AB = 2cm$

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB}$

Réponse

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AA}$ car :

A est le projeté orthogonales de A sur (AB) et B est le projeté orthogonales de B sur (AB) et A est le projeté orthogonales de C sur (AB)



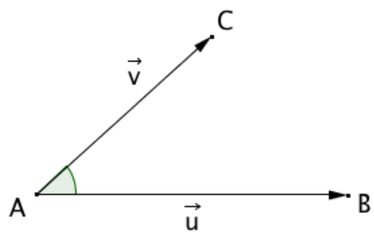
donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AA = AB \times 0 = 0$

de même On a $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA \times BA = 2 \times 2 = 4$

de même On a $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB} = -BA \times AB = -2 \times 2 = -4$

Définition2: Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La <u>norme du vecteur</u> $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

Définition3 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle <u>produit scalaire</u> de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel définit par :
- $\vec{u}.\vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$, dans le cas contraire.



$\vec{u}.\vec{v}$ se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".

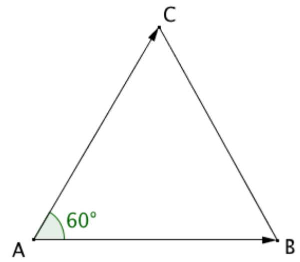
<u>Remarque :</u>

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos BAC$

<u>Exemple :</u>

Soit un triangle équilatéral ABC de côté a.



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos BAC$

$= a \times a \times \cos\frac{\pi}{3} = a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

<u>Attention :</u> Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Ecrire par exemple $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

2) propriétés

<u>Propriété :</u> Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

<u>Démonstration :</u>

On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (démonstration évidente dans la cas contraire).

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$

$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos\left(-(\vec{v}\,;\vec{u})\right)$

$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v}\,;\vec{u}) = \vec{v}.\vec{u}$

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

1) $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ 2) $\vec{u}.\left(k\vec{v}\right)=k\vec{u}.\vec{v}$, avec k un nombre réel.

- Admis -

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

1) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

2) $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

3) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

Démonstration pour le 2) :

$$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$$
$$=\vec{u}.\vec{u}-\vec{u}.\vec{v}-\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}$$
$$=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$$

II. Produit scalaire et norme

Soit un vecteur $\vec{u}$, on a :

$$\vec{u}.\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{u}\right\|\times\cos\left(\vec{u};\vec{u}\right)=\left\|\vec{u}\right\|^2\times\cos 0=\left\|\vec{u}\right\|^2$$

Et $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2$

On a ainsi : $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|^2$

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)$ et $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2\right)$

Démonstration de la première formule :

$$\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2$$
$$=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$$
$$=\left\|\vec{u}\right\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$$

donc $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)$

Propriété : Soit A, B et C trois points du plan. On a :

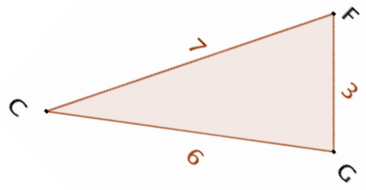
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$$

Démonstration :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$$

Exemple :

$$\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\left(CG^2+CF^2-GF^2\right)=\frac{1}{2}\left(6^2+7^2-3^2\right)=38$$



III. Produit scalaire et orthogonalité

1) Vecteurs orthogonaux

Propriété : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$.

Démonstration :

Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.
Supposons le contraire.

$\vec{u}.\vec{v}=0$

$\Leftrightarrow \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=0$

$\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Application : 1) Soit ABC un triangle tel que $AB=7$ et $AC=5$ et $BC=6$

a) Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ et en déduire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b) Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) Calculer AH

2) sachant que $\|\vec{u}\|=4$ et $\|\vec{v}\|=2$ et $\vec{u}.\vec{v}=-\frac{1}{2}$

a)Calculer : $A=\left(2\vec{u}-3\vec{v}\right).\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)$ et $B=\left(\frac{\vec{u}}{2}-\vec{v}\right).\left(\vec{u}+\frac{\vec{v}}{2}\right)$ et $C=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2$ et $D=\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)^2$

b)en déduire $E=\|\vec{u}-\vec{v}\|$ et $F=\|2\vec{u}+3\vec{v}\|$

Réponse : 1)

a) Calcule de $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$

On a $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{BA}\|^2-\|\overrightarrow{AC}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{BC}\|^2-\|\overrightarrow{BA}\|^2-\|\overrightarrow{AC}\|^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left(BC^2-AB^2-AC^2\right)=\frac{1}{2}\left(6^2-7^2-5^2\right)=-19$

donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=-19$

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=19$

b) Calcule de AH

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AH$ donc : $AH=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB}=\dfrac{19}{7}$

2) a) $A=\left(2\vec{u}-3\vec{v}\right).\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)=2\vec{u}.\vec{u}+4\vec{u}.\vec{v}-3\vec{u}.\vec{v}-6\vec{v}.\vec{v}=2\vec{u}.\vec{u}+4\vec{u}.\vec{v}-3\vec{u}.\vec{v}-6\vec{v}.\vec{v}$

$A=2\vec{u}^2+\vec{u}.\vec{v}-6\vec{v}^2=2.\|\vec{u}\|^2+\vec{u}.\vec{v}-6\|\vec{v}\|^2=2\times4^2+\frac{1}{2}-6\times2^2=32+\frac{1}{2}-24=\frac{15}{2}$

$$B=\left(\frac{\vec{u}}{2}-\vec{v}\right).\left(\vec{u}+\frac{\vec{v}}{2}\right)=\frac{1}{2}\vec{u}.\vec{u}+\frac{1}{4}\vec{u}.\vec{v}-\vec{u}.\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{v}.\vec{v}$$

$$B=\frac{1}{2}\times\left\|\vec{u}\right\|^2-\frac{3}{4}\times\vec{u}.\vec{v}-\frac{1}{2}\times\left\|\vec{v}\right\|^2=\frac{1}{2}\times 4^2-\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\times 2^2=8+\frac{3}{2}-2=\frac{51}{8}$$

$$C=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\left\|\vec{u}\right\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2=4^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)+2^2=16+1+4=21$$

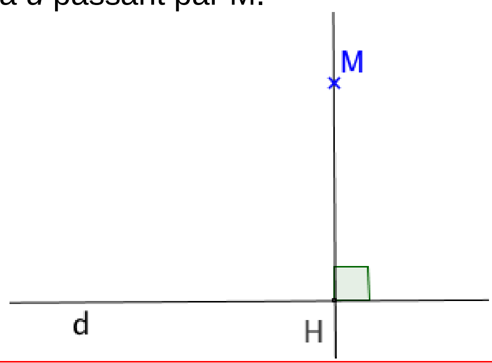
$$D=\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)^2=4\vec{u}^2+12\vec{u}.\vec{v}+9\vec{v}^2=4\left\|\vec{u}\right\|^2+12\vec{u}.\vec{v}+9\left\|\vec{v}\right\|^2=4\times 4^2+12\left(-\frac{1}{2}\right)+9\times 2^2=64-6+36=94$$

b) $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=21$ donc $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=94$ donc $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|=\sqrt{21}$

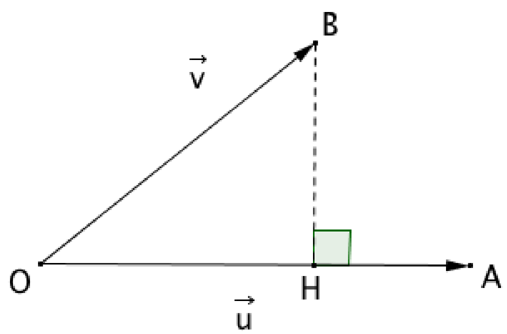
$\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)^2=94$ donc $\left\|2\vec{u}+3\vec{v}\right\|^2=94$ donc $\left\|2\vec{u}+3\vec{v}\right\|=\sqrt{94}$

2) Projection orthogonale

Définition : Soit une droite *d* et un point M du plan.
Le projeté orthogonal du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.



Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).
On a : $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$



Démonstration :

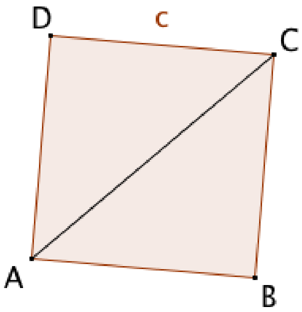
$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB}\right)=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$$

En effet, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB}=0$.

Exemple :

Soit un carré ABCD de côté c.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=c^2$$



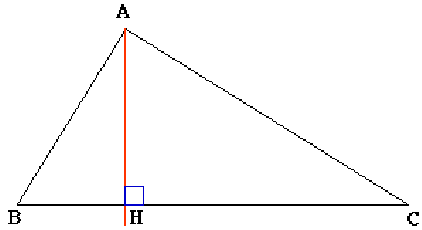
III. APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

1)LES RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

Le triangle ABC ci-dessous est rectangle en A et [AH] la hauteur.

Théorème : Théorème de Pythagore

si ABC est rectangle en A alors BC² = AB² + AC² (i.e. le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des 2 autres côtés)



Démonstration :

$$BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2$$

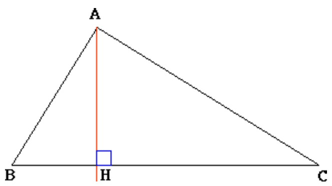
ABC est rectangle en A donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=0$

Donc $BC^2=AB^2+AC^2$

AUTRE RESULTATS :

$BA^2=BH\times BC$ ET $CA^2=CH\times BC$ ET $AH^2=HB\times HC$ ET $AB\times AC=AH\times BC$

Application : Soit ABC un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) et $AH=2cm$ et $ABC=\frac{\pi}{3}$



Calculer AB et BH et BC

Réponse

a)On a ABH un triangle rectangle en H donc

$$\sin\left(ABC\right)=\frac{AH}{AB}\ \text{Donc}\ AB=\frac{AH}{\sin\left(ABC\right)}=\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

b)On a $AB^2=AH^2+HB^2$ car ABH un triangle rectangle en H

$$\text{Donc: } AB^2-AH^2=HB^2\ \text{Donc: } \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2-2^2=HB^2\ \text{Donc: } \frac{16}{3}-2^2=HB^2\ \text{Donc: } HB^2=\frac{4}{3}$$

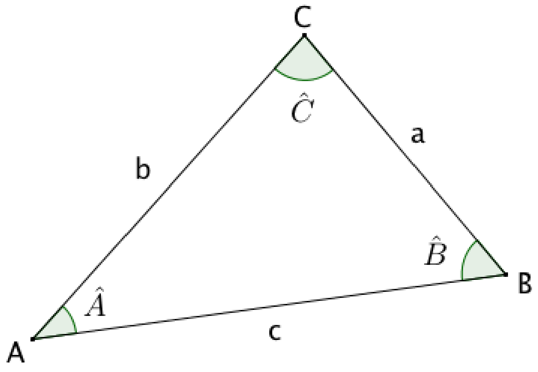
$$HB=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

c)On a $BA^2=BH\times BC$ Donc: $BC=\frac{BA^2}{BH}$ Donc: $BC=\frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}}=\frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}}=\frac{8}{3}\sqrt{3}$

2) Théorème d'Al Kashi

Théorème : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos A$$



Démonstration :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos A$

et

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)$

donc : $\frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = AB \times AC \times \cos A$

soit : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$

A Samarkand, le savant perse *Jemshid ibn Massoud al Kashi (1380 ; 1430)* vit sous la protection du prince *Ulugh-Beg* (1394 ; 1449) qui a fondé une Université comprenant une soixantaine de scientifiques qui étudient la théologie et les sciences.
Dans son Traité sur le cercle (1424), *al Kashi* calcule le rapport de la circonférence à son rayon pour obtenir une valeur approchée de 2π avec une précision jamais atteinte. Il obtient 9 positions exactes en base 60 soit 16 décimales exactes :
$2\pi \approx$ 6,283 185 307 179 586 5

Soit ABC un triangle quelconque.
On a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times AC \times \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

Application : Soit ABC un triangle tel que et $AB = 5$ et $AC = 8$ et $A = \frac{2\pi}{3}$

Calculer BC et $\cos C$

Réponse

a)D’après le Théorème d'Al Kashi on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$

$BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \cos \frac{2\pi}{3}$ donc $BC^2 = 25 + 64 + 40 = 129$ donc $BC = \sqrt{129}$

b)D’après le Théorème d'Al Kashi on a :

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2CA \times CB \cos C$ donc $2CA \times CB \cos C = AC^2 + BC^2 - AB^2$

donc $\cos C = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2CA \times CB}$ donc $\cos C = \dfrac{64+129-25}{2\times 8 \times \sqrt{129}} = \dfrac{168}{16\sqrt{129}} = \dfrac{21\sqrt{129}}{258}$

EXERCICE : Soit EFG un triangle tel que et $EF = 7$ et $EG = 5$ et $FEG = \dfrac{\pi}{4}$

Calculer FG et $\cos EGF$

3) Théorème de la médiane

Propriété : Soit deux points A et B et I le milieu du segment [AB].

Pour tout point M, on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

Démonstration :

$MA^2 + MB^2 = \left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2$

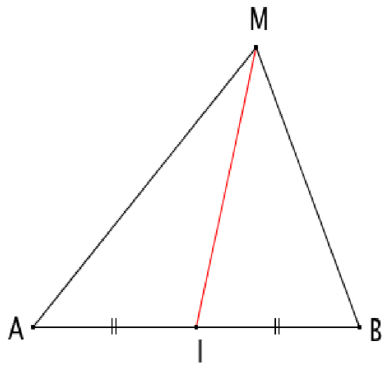
$= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$

$= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2$

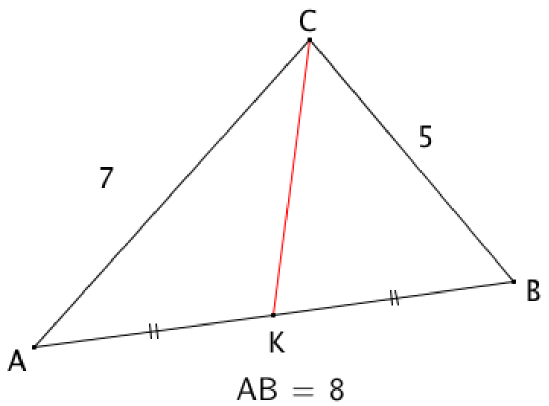
$= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2$

$= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\vec{0} + \left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2$

$= 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$



Exemple :



On souhaite calculer CK .
D'après le théorème de la médiane, on a :

$CA^2 + CB^2 = 2CK^2 + \dfrac{AB^2}{2}$, donc :

$CK^2 = \dfrac{1}{2}\left(CA^2 + CB^2 - \dfrac{AB^2}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(7^2 + 5^2 - \dfrac{8^2}{2}\right) = 21$

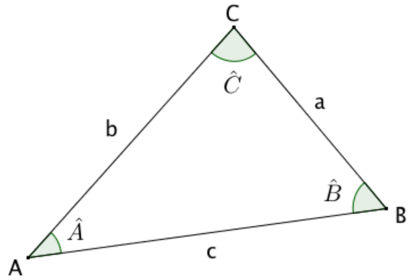
Donc : $CK = \sqrt{21}$.

3) Surface d'un triangle et formule de sinus

Propriétés : Dans un triangle ABC, on a

1) $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$ avec S Surface du triangle ABC

2) $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{2\times S}{abc}$ formule de sinus



Application1 : : Soit $EFGH$ un parallélogramme tel que et $EF=3$ et $EH=5$ et $FEH=\frac{3\pi}{4}$

Calculer la Surface du triangle EFH et la Surface du parallélogramme $EFGH$

Réponse

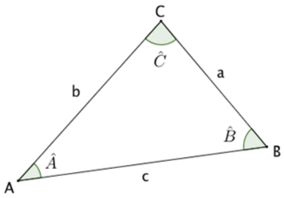
a) $S_{EFH}=\frac{1}{2}EF\times EH\sin E=\frac{1}{2}3\times5\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{15}{2}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{15}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{15}{4}\sqrt{2}$

b) $S_{EFGH}=2\times S_{EFH}=2\times\frac{15}{4}\sqrt{2}=\frac{15}{2}\sqrt{2}$

Application2 : : Soit ABC un triangle tel que et $a=BC=6$ et $A=30°$ et $B=73°$

Calculer b et c

Réponse



D'après la formule de sinus on a : $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{2\times S}{abc}$

$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin 30°}{6}=\frac{1}{12}$ donc $\frac{\sin 73°}{b}=\frac{1}{12}$ donc $b=12\sin 73°=11.47$

$\frac{\sin 77°}{c}=\frac{1}{12}$ donc $c=12\sin 77°=11.69$