

EXERCICES CORRIGES

Exercice n 1.

Déterminer la limite éventuelle en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \frac{1}{x^3} \quad 2) f(x) = -x^4 \quad 3) f(x) = -3 + \frac{1}{x}$$

Déterminer la limite éventuelle en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

$$4) f(x) = -x^3 \quad 5) f(x) = 5 + \frac{1}{x} \quad 6) f(x) = \sqrt{-x}$$

Détermine les limites suivantes

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - \frac{1}{x}) \quad 8) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2 - 4 + \frac{1}{x}) \quad 9) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + x - 3) \quad 10) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x-4} \quad 11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-2 + \frac{3}{x}}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(-x+1) \quad 13) \lim_{t \rightarrow -\infty} (-3t(t-4)) \quad 14) \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{1}{x} + 3 \right)$$

Etudier le comportement de f lorsque x tend vers a avec :

$$15) f(x) = \frac{1}{x-2}, a = 2 \quad 16) f(x) = \frac{-2}{x+3}, a = -3 \quad 17) f(x) = \frac{1}{x^2}, a = 0$$

Exercice n 2.

Déterminer les limites de $f(x) = \frac{x}{(x+1)(x-2)}$ en $x = 2$ et $x = -1$.

Exercice n 3.

Détermine les limites suivantes

$$1) f(x) = \sqrt{\frac{2x^2-1}{x}} \text{ en } +\infty \quad 2) g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en } -\infty$$

Exercice n 4.

Vrai ou Faux ?

- 1) Si une fonction f est strictement croissante et positive sur $[0; +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- 2) Si une fonction f a pour limite 0 en $+\infty$, alors, à condition de prendre x suffisamment grand, tous les nombres réels $f(x)$ sont de même signe
- 3) Si une fonction f a pour limite -1 en $+\infty$, alors, à condition de prendre x suffisamment grand, tous les nombres réels $f(x)$ sont de même signe

Exercice n 5.

f est une fonction numérique dont l'expression est $f(x) = ax + \frac{2}{x-b}$.

Déterminer a et b sachant que $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 11$

Exercice n 6. Détermine les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - 2x + 10 \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^3 + 5x - 2 \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 4}{x^2 + x + 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8x^3 + 1}{4x + 16} \quad 5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} \quad 6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1} \quad 7) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

Exercice n 7.

Trouver deux fonctions f et g telles que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et telles que :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = 1 \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 7$$

Exercice n 8.

Détermine les limites suivantes : 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x}$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 3} - (x+2)$

Exercice n 9.

1) Soit f une fonction telle que pour tout x $1, \frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Soit f une fonction telle que pour tout x $1, \frac{2}{x} \leq f(x) - \frac{3}{2} \leq \frac{3}{x}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Les propriétés suivantes permettent-elles de conclure concernant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$?

3) $f(x) \geq 2x - 3$

4) $f(x) \geq x^2 - 3$

Exercice n 10.

On considère la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x - \sqrt{x} + 4$

1) Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$ $f(x) \geq 3\sqrt{x}$

2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Exercice n 11.

Soit la fonction f définie sur $D = [0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$

1) Démontrer que, pour tout x de D , on a : $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$.

2) Démontrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$: $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$

3) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exercice n 12.

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = 2x - \sin x$

1) Montrer que pour tout x réel $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$

2) En déduire les limites de f lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$

Exercice n 13.

Déterminer, à l'aide des théorèmes de comparaison, les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions f suivantes (si elles existent):

1) $f(x) = \frac{1 + \cos x}{\sqrt{x}}$ 2) $f(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 1}$;

Exercice n 14.

On veut trouver la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}}{x}$

1) Montrer que pour $x > 0$, $x^2 < 1 + x^2 < (1+x)^2$

2) En déduire pour $x > 0$ un encadrement de $f(x)$.

3) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice n 15.

Soit x un réel de $]0; \frac{\pi}{2}[$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points $A(1;0)$,

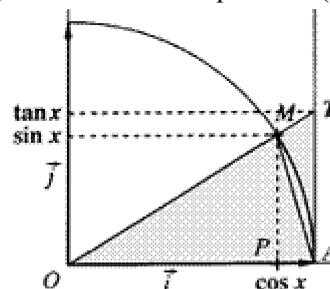
$M(\cos x; \sin x)$, $P(\cos x; 0)$ et $T(1; \tan x)$. Soit A_1 l'aire du

triangle OAM, A_2 l'aire du secteur de disque OAM et A_3 l'aire du triangle OAT.

1) En comparant ces aires, prouver que : $\sin x \leq x \leq \tan x$.

2) En déduire que $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

3) Déterminer la limite de $\frac{\sin x}{x}$ en 0 (étudier les cas $x < 0$ et $x > 0$).



Exercice n 16.

En utilisant le résultat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (cf exercice précédent), étudie les limites en 0 des fonctions :

- 1) $x \rightarrow \frac{\sin 5x}{2x}$ 2) $x \rightarrow \frac{x}{\sin 3x}$ 3) $x \rightarrow \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$ 4) $x \rightarrow \frac{\tan x}{x}$

Exercice n 17.

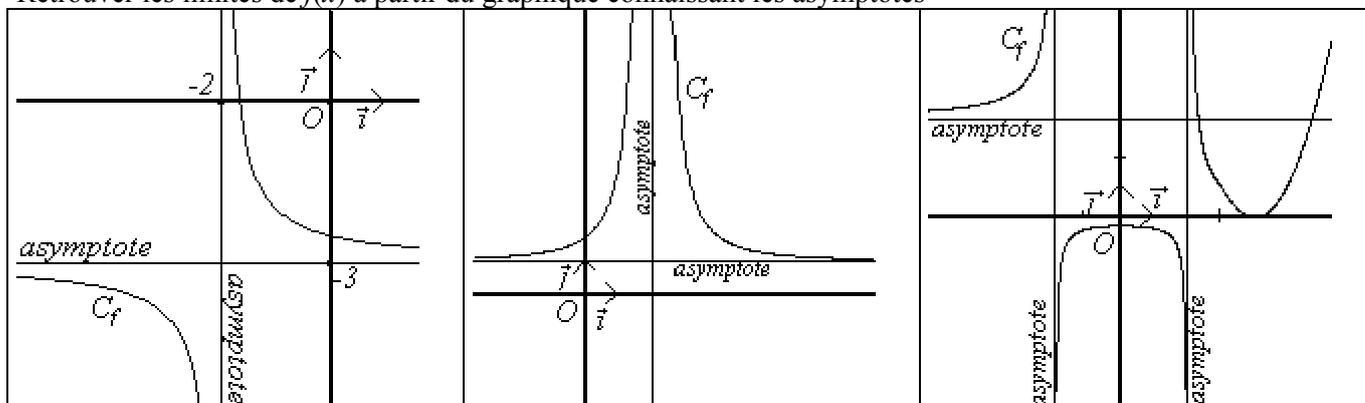
En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

Exercice n 18.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos 2x - 1}{6x - \pi}$

Exercice n 19.

Retrouver les limites de $f(x)$ à partir du graphique connaissant les asymptotes

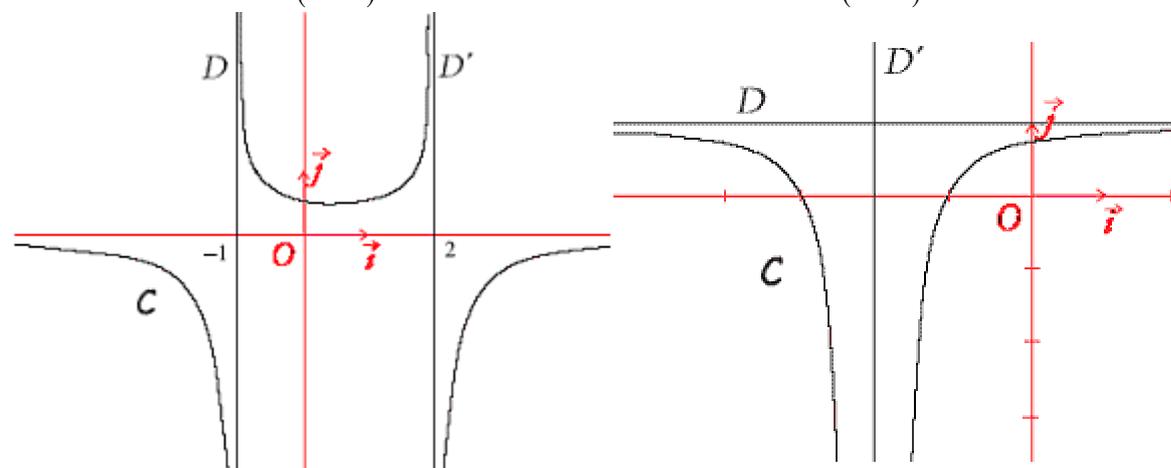


Exercice n 20.

Dans chacun des cas ci-dessous, on donne trois fonctions et la représentation graphique C de l'une d'entre elles. Retrouver celle qui est représentée, en justifiant (qu'est-ce qui permet d'éliminer les 2 autres ?)

1^{er} cas $f_1(x) = -\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ ou $f_2(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$ ou $f_3(x) = -\frac{1}{(x+1)(x-2)}$

2^{ème} cas $g_1(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ ou $g_2(x) = 1 - \frac{1}{(x+2)^2}$ ou $g_3(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$



Exercice n 21.

Rechercher les asymptotes parallèles aux axes que peuvent présenter les courbes des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \frac{3x-1}{x} \quad 2) f(x) = -\frac{1}{x^2} \quad 3) f(x) = \frac{1}{x+2} \quad 4) f(x) = \frac{1}{x^2-4} \quad 5) f(x) = \frac{2x-1}{x-3x+2}$$

Exercice n 22.

Soit f la fonction $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$. Etudier le comportement de f en 0 , $+\infty$ et $-\infty$, en précisant les asymptotes à la courbe représentative de f et les positions relatives de la courbe et de chaque asymptote.

Exercice n 23.

Soit f la fonction $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 2}$

- Détermine trois nombres réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$ pour $x \neq -2$
- Etudier le comportement de f en $+\infty$ (limite, asymptote sur la courbe).

Exercice n 24.

Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

Exercice n 25.

Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote pour $x \rightarrow +\infty$ à la courbe représentative de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

Exercice n 26.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 20}{x + 3}$

- Quel est l'ensemble de définition D de f ?
- Détermine trois réels a, b et c tels que pour tout x de D , on ait : $f(x) = ax^2 + b + \frac{c}{x+3}$
- Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} f(x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax^2 + b))$
- Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = x^2 - 4$. Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ suivant les valeurs de x . En déduire les positions relatives des courbes suivant les valeurs de x .

Exercice n 27.

Pour tout réel x non nul, on considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{(50 + x^{20})^2 - 2500}{x^{20}}$

A l'aide de la calculatrice, remplir le tableau suivant :

x	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,01
Valeur approchée de $f(x)$							

- Peut-on conjecturer la limite de f en 0 ?
- En développant $(50 + x^{20})^2$, simplifier l'expression de $f(x)$ pour $x \neq 0$. Calculer alors la limite de f en 0 . Surprenant, non ?