Exercice 1 :

1) a - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$\Delta = (-5)^2 - 4\times 1\times(6) = 1 > 0$ l'équation admet deux solutions distincts.

$x_1 = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{5-\sqrt{1}}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$

$S = \{2;3\}$

b – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$$

On a $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(e^x\right)^2 - 5e^x + 6 = 0$

On pose $t = e^x$ donc $t^2 - 5t + 6 = 0$

Donc $t = 2$ ou $t = 3 \Leftrightarrow e^x = 2$ ou $e^x = 3$

$\Leftrightarrow x = \ln 2$ ou $x = \ln 3$

$S = \{\ln 2; \ln 3\}$

c - Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation suivante :

$$\ln^2 x - 5\ln x + 6 = 0 \qquad x > 0$$

On a $\ln^2 x - 5\ln x + 6 = 0 \Leftrightarrow (\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0$

On pose $t = \ln x$ donc $t^2 - 5t + 6 = 0$

Donc $t = 2$ ou $t = 3 \Leftrightarrow \ln x = 2$ ou $\ln x = 3$

$\Leftrightarrow x = e^2$ ou $x = e^3$

$S = \{e^2; e^3\}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système: $\begin{cases} e^x e^y = 10 \\ \frac{e^x}{e^y} = \frac{2}{5} \end{cases}$

$$\begin{cases} e^x e^y = 10 \\ \frac{e^x}{e^y} = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x+y} = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \ln 10 \\ x-y = \ln\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \ln 2\times 5 \\ x-y = \ln 2 - \ln 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \ln 2 + \ln 5 \\ x-y = \ln 2 - \ln 5 \end{cases}$$

Donc $2x = 2\ln 2$ et $2y = 2\ln 5$

Donc $x = \ln 2$ et $y = \ln 5$

D'où $S = \{(\ln 2; \ln 5)\}$

Exercice 2 :

I - Résoudre dans C l'équation : $z^2 - 2z + 26 = 0$

$z^2 - 2z + 26 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4\times 26 = -100 < 0$

$= (10i)^2$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{2+i10}{2} = 1+5i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1-5i$

D'où $S = \{1-5i; 1+5i\}$

II - Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 1+5i$ et $b = 1-5i$ et $c = \frac{7}{2}$

1) Soit z l'affixe du point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image du point M par la transformation h définie par l'expression complexe : $z' = \frac{-3}{5}z + \frac{56}{10}$

a – Montrer que h est une homothétie de centre C et de rapport $\frac{-3}{5}$

On a $c = \frac{7}{2}$ et $k = \frac{-3}{5}$

$h(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{-3}{5}z + \frac{56}{10}$

$\Leftrightarrow z' - \frac{7}{2} = \frac{-3}{5}z + \frac{56}{10} - \frac{7}{2} \Leftrightarrow z' - \frac{7}{2} = \frac{-3}{5}z + \frac{21}{10}$

$\Leftrightarrow z' - \frac{7}{2} = \frac{-3}{5}z - (\frac{-3}{5})\times\frac{7}{2} \Leftrightarrow z' - \frac{7}{2} = \frac{-3}{5}(z - \frac{7}{2})$

$\Leftrightarrow z' - c = \frac{-3}{5}(z - c)$

D'où h est une homothétie de centre C et de rapport $\frac{-3}{5}$

b - Montrer que l'affixe du point D image du point B par l'homothétie h est : $d = 5+3i$

$h(B) = D \Leftrightarrow d = \frac{-3}{5}b + \frac{56}{10}$

$\Leftrightarrow d = \frac{-3}{5}(1-5i) + \frac{56}{10} = \frac{-3}{5} + 3i + \frac{56}{10}$

$\Leftrightarrow d = \frac{50}{10} + 3i + \frac{56}{10} = 5 + 3i$

D'où $d = 5+3i$

2) a – Montrer que $\frac{d-a}{c-b} = \frac{-4}{5}i$

$$\frac{d-a}{c-b} = \frac{5+3i-1-5i}{\frac{7}{2}-1+5i} = \frac{4-2i}{\frac{5}{2}+5i} = \frac{8-4i}{5+10i}$$

$$\frac{d-a}{c-b}=\frac{8-4i}{5+10i}=\frac{-4}{5}\frac{(-2+i)}{1+2i}$$

$$\frac{d-a}{c-b}=\frac{-4}{5}\frac{(2i^2+i)}{1+2i}=\frac{-4i}{5}\frac{(2i+1)}{1+2i}$$

D'où $\frac{d-a}{c-b}=\frac{-4}{5}i$

b – Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AD})$ en déduire que $[AD]$ est une hauteur du triangle ABC

On a $\frac{d-a}{c-b}=\frac{-4}{5}i=\frac{4}{5}(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2})$

$\frac{d-a}{c-b}=\frac{-4}{5}i=\frac{4}{5}\left(\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})\right)$

Donc $\frac{d-a}{c-b}=\left[\frac{4}{5};-\frac{\pi}{2}\right]$ on a $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AD})\equiv\arg\left(\frac{d-a}{c-b}\right)[2\pi]$

Donc $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AD})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

On a $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AD})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\Rightarrow(BC)\perp(AD)$

Or h(B) = D donc B, C et D sont alignés.

D'où $[AD]$ est une hauteur du triangle ABC.

3) Montrer que l'ensemble M(z) des points du plan complexe qui vérifient $|\bar{z}-1+5i|=10$ est le cercle (C) de centre A qui passe par le point B.

On a $a=1+5i$ et $b=1-5i$ et $|\bar{z}|=|z|$

On sait que $|\bar{z}-1+5i|=|\overline{\bar{z}-1+5i}|=|z-1-5i|$

Donc $|\bar{z}-1+5i|=|z-(1+5i)|=|z-a|$

Donc $|z-a|=10\Leftrightarrow AM=10$ donc l'ensemble M(z) est le cercle de centre A et de rayon 10 or

$AB=|b-a|=|-10i|=10$

D'où l'ensemble M(z) des points du plan complexe qui vérifient $|\bar{z}-1+5i|=10$ est le cercle (C) de centre A qui passe par le point B.

Exercice 3 :

On pose $I=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$ et $J=\int_0^{\ln 2}e^x\ln(e^x+1)dx$

1) a - Vérifier que : $e^x-1+\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{2x}}{e^x+1}$

$$e^x-1+\frac{1}{e^x+1}=\frac{(e^x-1)(e^x+1)+1}{e^x+1}$$

$$=\frac{e^{2x}-1+1}{e^x+1}=\frac{e^{2x}}{e^x+1}$$

D'où $e^x-1+\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{2x}}{e^x+1}$

b - Donner la fonction dérivée de : $f(x)=\ln\left(\frac{e^{2x}}{e^x+1}\right)$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{e^{2x}}{e^x+1}\right)'}{\frac{e^{2x}}{e^x+1}}$$

$$\left(\frac{e^{2x}}{e^x+1}\right)'=\frac{2e^{2x}(e^x+1)-e^{2x}e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{3x}+2e^{2x}}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{e^{3x}+2e^{2x}}{(e^x+1)^2}}{\frac{e^{2x}}{e^x+1}}=\frac{e^{2x}(e^x+2)}{e^{2x}(e^x+1)}$$

D'où $f'(x)=\frac{e^x+2}{e^x+1}$ $\quad\frac{e^x+2}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}+1$

2) a – Calculer l'intégrale I.

$$I=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx=\int_0^{\ln 2}e^x-1+\frac{1}{e^x+1}dx$$

$$I=\int_0^{\ln 2}e^x-1+\frac{1}{e^x(1+\frac{1}{e^x})}dx$$

$$I=\int_0^{\ln 2}e^x-1+\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$$

$$I=\int_0^{\ln 2}e^x-1-\frac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}}dx\,;(1+e^{-x})'=-e^{-x}$$

$$I=\left[e^x-x-\ln(1+e^{-x})\right]_0^{\ln 2}$$

$$I=e^{\ln 2}-\ln 2-\ln(1+e^{-\ln 2})-1+\ln 2$$

Donc $I=1-\ln(1+e^{\ln\frac{1}{2}})=1-\ln\frac{3}{2}$

D'où $I=1-\ln\frac{3}{2}$

b – A l'aide d'une intégration par parties calculer J.

$$J=\int_0^{\ln 2}e^x\ln(e^x+1)dx$$

$u(x)=\ln(e^x+1)$ $\quad u'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$

$v'(x)=e^x$ $\quad v(x)=e^x$

$$J=\left[e^x\ln(e^x+1)\right]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}e^x\frac{e^x}{e^x+1}dx$$

$$J=e^{\ln 2}\ln(e^{\ln 2}+1)-\ln 2-\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$$

$$J=2\ln(3)-\ln 2-I=2\ln 3-\ln 2-1+\ln\frac{3}{2}$$

$$J=2\ln 3-\ln 2-1+\ln 3-\ln 2=3\ln 3-2\ln 2-1$$

D'où $J=3\ln 3-2\ln 2-1$

Problème :

Partie I :

1) On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$\mathbf{g(x)=-x+1+x\ln x}$

a- Calculer $\mathbf{g'(x)}$ et dresser le tableau des variations de la fonction g.

$\mathbf{g(x)=-x+1+x\ln x}$

$\mathbf{g'(x)=-1+\ln x+x\frac{1}{x}=-1+\ln x+1=\ln x}$

D'où $\mathbf{g'(x)=\ln x}$

$\mathbf{g'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1}$

On a $\forall \mathbf{x}\in]0;1]$ $\mathbf{g'(x)\le 0}$ **et** $\mathbf{g'(x)\ge 0}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	0	↗	

b – En déduire que $\mathbf{g(x)\ge 0}$ $\forall \mathbf{x}\in]0;+\infty[$ et que 1 est la seule solution de l'équation $g(x) = 0$

Donc $g(1) = 0$ est le minimum de g sur $]0;+\infty[$

$\forall \mathbf{x}\in]0;+\infty[$ $\mathbf{g(x)\ge g(1)}$ D'où $\mathbf{g(x)\ge 0}$ $\forall \mathbf{x>0}$

On a $\forall \mathbf{x}\in]0;1[\cup]1;+\infty[$ $\mathbf{g(x)>0}$ or $g(1) = 0$

Donc 1 est la seule solution de l'équation $g(x) = 0$

2) On pose $\mathbf{h(x)=1+2x\ln x}$ $\forall \mathbf{x}\in]0;+\infty[$

a- Calculer $\mathbf{h'(x)}$ et dresser le tableau des variations de la fonction h.

$\mathbf{h(x)=1+2x\ln x}$

$\mathbf{h'(x)=2\ln x+2x\frac{1}{x}=2\ln x+2=2(\ln x+1)}$

D'où $\mathbf{h'(x)=2(\ln x+1)}$ $\forall \mathbf{x}\in]0;+\infty[$

$\mathbf{h'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}}$

$\forall \mathbf{x}\in \left]0;\frac{1}{e}\right]$ $\mathbf{h'(x)\le 0}$ **et** $\mathbf{h'(x)\ge 0}$ $\forall \mathbf{x\ge \frac{1}{e}}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖	↘	$\frac{e-1}{e}$	↗	

b – En déduire que $\mathbf{h(x)>0}$ $\forall \mathbf{x}\in]0;+\infty[$

$\mathbf{h(\frac{1}{e})=1+\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=1-\frac{1}{e}\ln e=\frac{e-1}{e}}$

$\mathbf{h(\frac{1}{e})}$ est le minimum de h sur $]0;+\infty[$

$\forall \mathbf{x}\in]0;+\infty[$ $\mathbf{h(x)\ge h(\frac{1}{e})}$ or $\mathbf{h(\frac{1}{e})=\frac{e-1}{e}>0}$

D'où $\mathbf{h(x)>0}$ $\forall \mathbf{x}\in]0;+\infty[$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} \mathbf{f(x)=x(\ln x-1)+2\sqrt{x}} & \mathbf{x\neq 0} \\ \mathbf{f(0)=0} & \end{cases}$$

$(\mathbf{C_f})$ est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(\mathbf{O};\vec{\mathbf{i}};\vec{\mathbf{j}})$ (unité : 1 cm)

1) a – Montrer que f est continue à droite en 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \mathbf{f(x)}=f(0)$?

$\lim\limits_{x\to 0^+} \mathbf{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+} \mathbf{x(\ln x-1)+2\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+} \mathbf{x\ln x-x+2\sqrt{x}=0=f(0)}$

Car $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathbf{x\ln x=0}$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathbf{f(x)}=f(0)$

D'où f est continue à droite en 0

b – Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{x}}=+\infty$ (on peut poser $\mathbf{t=\sqrt{x}}$) et interpréter le résultat géométriquement.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\mathbf{x(\ln x-1)+2\sqrt{x}}}{\mathbf{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+} \mathbf{\ln x-1+\frac{2\sqrt{x}}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+} \mathbf{\ln x-1+\frac{2}{\sqrt{x}}}$

On pose $\mathbf{t=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=t^2}$ donc $\mathbf{x\to 0^+ \Leftrightarrow t\to 0^+}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \mathbf{\ln x-1+\frac{2}{\sqrt{x}}}=\lim\limits_{t\to 0^+} \mathbf{\ln t^2-1+\frac{2}{t}}$

$=\lim\limits_{t\to 0^+} \mathbf{2\ln t-1+\frac{2}{t}}=\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\mathbf{2t\ln t-t+2}}{\mathbf{t}}=+\infty$

Car $\lim\limits_{t\to 0^+} \mathbf{t\ln t=0}$

D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{x}}=+\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{x}}=+\infty$ $(\mathbf{C_f})$ admet une demi tangente verticale à droite en 0.

1) a – Calculer: $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathbf{f(x)}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \mathbf{f(x)}=\lim\limits_{x\to +\infty} \mathbf{x(\ln x-1)+2\sqrt{x}=+\infty}$

Car $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathbf{\ln x=+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathbf{\sqrt{x}=+\infty}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \mathbf{x(\ln x-1)=+\infty}$

b - Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{x}}=+\infty$ et interpréter les résultats géométriquement.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty} \mathbf{\ln x-1+\frac{2}{\sqrt{x}}=+\infty}$

Car $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathbf{\ln x=+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathbf{\frac{2}{\sqrt{x}}=0}$

3) a – Montrer que $\mathbf{f}'(\mathbf{x})=\frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}}}\mathbf{h}(\sqrt{\mathbf{x}}) \quad \forall \mathbf{x}>0$

$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{x}(\ln \mathbf{x}-1)+2\sqrt{\mathbf{x}} \qquad \forall \mathbf{x}>0$

$\mathbf{f}'(\mathbf{x})=(\ln \mathbf{x}-1)+\mathbf{x}(\ln \mathbf{x}-1)'+2\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{x}}}$

$\mathbf{f}'(\mathbf{x})=\ln \mathbf{x}-1+\mathbf{x}\frac{1}{\mathbf{x}}+\frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}}}=\ln \mathbf{x}+\frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}}}$

$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}}}\mathbf{h}(\sqrt{\mathbf{x}})=\frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}}}\left(1+2\sqrt{\mathbf{x}}\ln\sqrt{\mathbf{x}}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}}}+2\frac{1}{2}\ln \mathbf{x}=\frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}}}+\ln \mathbf{x} \qquad \ln\sqrt{\mathbf{x}}=\frac{1}{2}\ln \mathbf{x}$

D'où $\mathbf{f}'(\mathbf{x})=\frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}}}\mathbf{h}(\sqrt{\mathbf{x}})$

b – En déduire que f est croissante sur $[0;+\infty[$ et dresser le tableau des variations de la fonction f.

$\mathbf{f}'(\mathbf{x})=\frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}}}\mathbf{h}(\sqrt{\mathbf{x}})$

On a $\mathbf{h}(\mathbf{x})>0 \ \forall \mathbf{x}\in]0;+\infty[$ donc $\sqrt{\mathbf{x}}>0$

Donc $\mathbf{h}(\sqrt{\mathbf{x}})>0$ donc $\mathbf{f}'(\mathbf{x})>0 \quad \forall \mathbf{x}\in]0;+\infty[$

Donc f est croissante sur $]0;+\infty[$ or f (0) = 0

D'où f est croissante sur $[0;+\infty[$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
f′(x)	$\Vert$ $\qquad$ +
f(x)	0 $\nearrow$ $+\infty$

c) Déterminer l'équation de la tangente (Δ) à $(\mathbf{C_f})$ au point d'abscisse 1.

On a $\mathbf{y}=\mathbf{f}'(1)(\mathbf{x}-1)+\mathbf{f}(1)$; $\mathbf{f}(1)=1$ et $\mathbf{f}'(1)=1$

Donc $\mathbf{y}=\mathbf{x}$

4) a – Montrer que $\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathrm{x}=2\sqrt{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\sqrt{\mathbf{x}}) \quad \forall \mathbf{x}>0$

$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{x}(\ln \mathbf{x}-1)+2\sqrt{\mathbf{x}}$

$\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathrm{x}=\mathbf{x}\ln \mathbf{x}-\mathbf{x}+2\sqrt{\mathbf{x}}-\mathbf{x}$

$\Leftrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathrm{x}=\mathbf{x}\ln \mathbf{x}-2\mathbf{x}+2\sqrt{\mathbf{x}}$

$2\sqrt{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\sqrt{\mathbf{x}})=2\sqrt{\mathbf{x}}(-\sqrt{\mathbf{x}}+1+\sqrt{\mathbf{x}}\ln\sqrt{\mathbf{x}})$

$=-2\mathbf{x}+2\sqrt{\mathbf{x}}+2\mathbf{x}\ln\sqrt{\mathbf{x}}=-2\mathbf{x}+2\sqrt{\mathbf{x}}+2\mathbf{x}\frac{1}{2}\ln \mathbf{x}$

$=-2\mathbf{x}+2\sqrt{\mathbf{x}}+\mathbf{x}\ln \mathbf{x}$

D'où $\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathrm{x}=2\sqrt{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\sqrt{\mathbf{x}}) \quad \forall \mathbf{x}>0$

b- En déduire que $(\mathbf{C_f})$ est au-dessus de (Δ) sur $[0;+\infty[$

On a $\mathbf{g}(\mathbf{x})\geq 0 \quad \forall \mathbf{x}\in]0;+\infty[$

Donc $\sqrt{\mathbf{x}}>0$ donc $\mathbf{g}(\sqrt{\mathbf{x}})\geq 0$

donc $\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathrm{x}=2\sqrt{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\sqrt{\mathbf{x}})\geq 0$

Donc $\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathrm{x}\geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x})\geq \mathrm{x} \quad \forall \mathbf{x}\in[0;+\infty[$ f(0)=0

D'où $(\mathbf{C_f})$ est au-dessus de (Δ) sur $[0;+\infty[$

5) a – Montrer que f admet une fonction réciproque $\mathbf{f}^{-1}$ définie sur un intervalle J à déterminer.

f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$

donc f admet une fonction réciproque $\mathbf{f}^{-1}$ définie sur $\mathbf{f}([0;+\infty[)$

Donc $\mathbf{f}([0;+\infty[)=[0;+\infty[$ donc $\mathbf{J}=[0;+\infty[$

b - Montrer que la fonction $\mathbf{f}^{-1}$ est dérivable en 1 puis calculer $\left(\mathbf{f}^{-1}\right)'(1)$

On a f est dérivable en 1 et $\mathbf{f}'(1)=1$ donc $\mathbf{f}'(1)\neq 0$

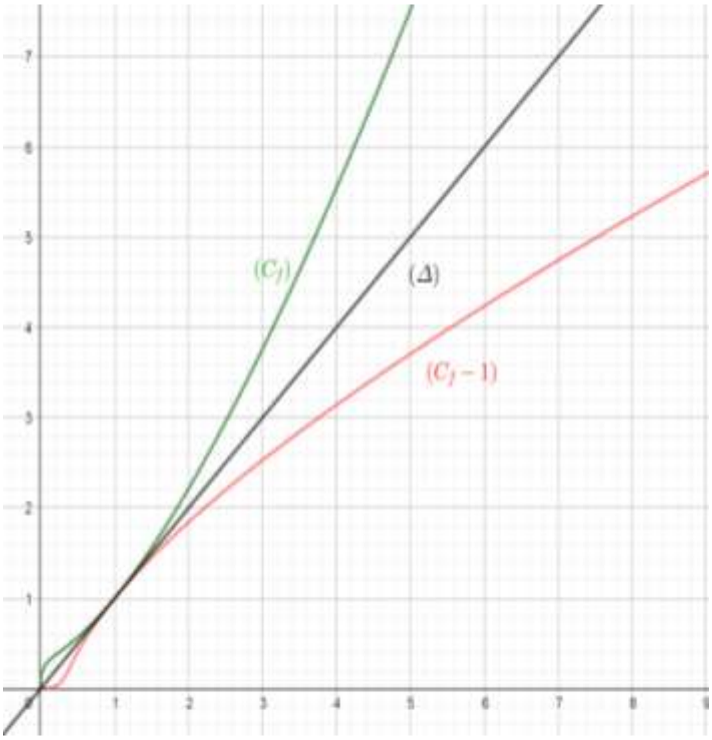
D'où que la fonction $\mathbf{f}^{-1}$ est dérivable en $\mathbf{f}(1)=1$

$\mathbf{f}(1)=1 \Leftrightarrow \mathbf{f}^{-1}(1)=1$

$\left(\mathbf{f}^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{\mathbf{f}'(\mathbf{f}^{-1}(1))}=\frac{1}{\mathbf{f}'(1)}=1$

d'où $\left(\mathbf{f}^{-1}\right)'(1)=1$

6) Tracer la droite (Δ) ,la courbe (C_f) et $(\mathbf{C}_{\mathbf{f}^{-1}})$.



Partie III :

On considère la suite (U_n) définie par :

$\mathbf{U_{n+1}}=\mathbf{f}(\mathbf{U_n}) \quad \forall \mathbf{n}\in\mathbb{N}$ et $\mathbf{U}_0=\frac{1}{2}$

1) Montrer que : $0<\mathbf{U_n}<1 \quad \forall \mathbf{n}\in\mathbb{N}$

Pour n = 0 on a $\mathbf{U}_0=\frac{1}{2}$ donc $0<\mathbf{U}_0<1$

Soit n ∈ ℕ supposons que $0<\mathbf{U_n}<1$ et montrons que $0<\mathbf{U_{n+1}}<1$

On a f est strictement croissante sur I et $0<\mathbf{U_n}<1$

$0<\mathbf{U_n}<1 \Leftrightarrow \mathbf{f}(0)<\mathbf{f}(\mathbf{U_n})<\mathbf{f}(1) \Leftrightarrow \mathbf{f}(0)<\mathbf{f}(\mathbf{U_n})<\mathbf{f}(1)$

$\Leftrightarrow 0<\mathbf{U_{n+1}}<1$

D'où $0<\mathbf{U_n}<1 \quad \forall \mathbf{n}\in\mathbb{N}$

2) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

$\forall \mathbf{x} \in [0;+\infty[\quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \geq x$ or $0 < \mathbf{U_n} < 1 \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}$

Donc $\mathbf{f}(\mathbf{U_n}) \geq \mathbf{U_n}$ donc $\mathbf{U_{n+1}} \geq \mathbf{U_n}$

D'où la suite (U_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer $\lim \mathbf{U_n}$

On a la suite (U_n) est croissante et majorée

D'où la suite (U_n) est convergente

f est continue sur $[0;+\infty[$ en particulier sur $[0;1]$

0n a $\mathbf{f}([0;1]) = [\mathbf{f}(0);f(1)] = [0;1]$ car f est croissante sur $[0;1]$ $\quad \mathbf{U_0} \in [0;1]$

(U_n) est convergente donc sa limite est une solution de l'équation $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = x$ or on sait que

Méthode algébrique

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\sqrt{\mathbf{x}}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\mathbf{x}} = 0$ ou $\mathbf{g}(\sqrt{\mathbf{x}}) = 0$

On a 1 est la seule solution de l'équation $g(x) = 0$

$\Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$ ou $\sqrt{\mathbf{x}} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$ ou $\mathbf{x} = 1$

Or la suite (U_n) est croissante donc $\mathbf{U_n} \geq \mathbf{U_0}$ et

$\mathbf{U_0} = \frac{1}{2}$ donc $\lim \mathbf{U_n} \geq \frac{1}{2}$

D'où $\lim \mathbf{U_n} = 1$

Méthode graphique

La droite (Δ) coupe la courbe $(\mathbf{C_f})$ en deux points d'abscisses 0 et 1donc 0 et 1 sont les solutions de l'équation $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$

Or la suite (U_n) est croissante donc $\mathbf{U_n} \geq \mathbf{U_0} \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}$

et $\mathbf{U_0} = \frac{1}{2}$ donc $\lim \mathbf{U_n} \geq \frac{1}{2}$

D'où $\lim \mathbf{U_n} = 1$