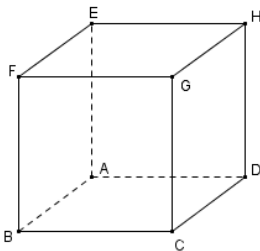


## VECTEURS DE L'ESPACE

### Exercice01 :



ABCDEFGH un cube on pose :

Simplifier :

$$\vec{t} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FH}$$

**Solution :**

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\vec{t} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) + \overrightarrow{FH}$$

(Relation de Chasles)

$$\vec{t} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}$$

$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$  (FHDB est un parallélogramme)

$$\vec{t} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{AE} = \vec{0} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE}$$

### Exercice02:

ABCDEFGH un cube et K milieu du segment [EF] et L milieu du segment [CF] et M un

point du segment [CD] tel que :  $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$

Montrer que :  $(ML) \parallel (DK)$

**Solution :** en utilisant la Relation de Chasles

On a :  $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{CL} - \overrightarrow{CM}$  et puisque : L milieu du

segment [CF] Alors :  $\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$

$$\text{donc : } \overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right) \quad (1)$$

D'autre part On a :  $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FK}$  et

$$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CK} - \overrightarrow{CD} \text{ Donc : } \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{CD}$$

et puisque : K milieu du segment [EF]

$$\text{Alors : } \overrightarrow{FK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} \text{ donc : } \overrightarrow{FK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \text{ (car : } \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CD}\text{)}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \quad (2)$$

$$\text{De (1) et (2) on a : } \overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DK}$$

donc  $\overrightarrow{DK}$  et  $\overrightarrow{ML}$  sont colinéaires

Donc :  $(ML) \parallel (DK)$

**Exercice03:**  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires

Déterminer les réels  $x$  et  $y$  tels que :

$$x(\vec{u} + 2\vec{v}) + y(\vec{u} + 3\vec{v}) = 2\vec{u} + 5\vec{v}$$

$$\text{Solution : } x(\vec{u} + 2\vec{v}) + y(\vec{u} + 3\vec{v}) = 2\vec{u} + 5\vec{v} \Leftrightarrow$$

$$(x + y - 2)\vec{u} + (2x + 3y - 5)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

### Exercice04 :

ABCDEFGH un parallélépipède de centre O et I milieu du segment [AD]

on pose  $\overrightarrow{EG} = \vec{u}$   $\overrightarrow{FC} = \vec{v}$  et  $\overrightarrow{IO} = \vec{w}$

Montrer que :  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires

**Solution :** On a :  $\overrightarrow{EG} = \vec{u}$  et on a  $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$

donc  $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$

On considère le triangle ADF

et puisque : I milieu du segment [AD]

et O milieu du segment [FD]

$$\text{on trouve : } \overrightarrow{IO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} \text{ Donc : } \overrightarrow{IO} = \overrightarrow{AK}$$

et puisque : K milieu du segment [AF]

cad  $\overrightarrow{AK} = \vec{w}$

et On considérons le point L tel que AFCL est

un parallélogramme on trouve :  $\vec{v} = \overrightarrow{AL}$

Alors :  $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AL}$  et  $\overrightarrow{AK} = \vec{w}$

Donc :  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires

**Exercice05 :** ABCDEFGH un cube

M milieu du segment [HE] et N milieu du

segment [HG]

Les vecteurs  $\overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{CH}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont-ils coplanaires ? justifier

**Solution :** On considérons le triangle HEG et puisque : M milieu du segment [HE] N milieu

du segment [HG] on trouve :  $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{MN}$

et puisque  $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$  : alors  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MN}$  donc

Les vecteurs  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires et par

suite Les vecteurs  $\overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{CH}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont coplanaires

**Exercice06 :**  $ABCD$  un tétraèdre et  $E$  le milieu du  $[BC]$  et soit les points  $Q$  ;  $P$  ;  $N$  ;  $M$  tel que :

$$\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AD} \quad \overrightarrow{CQ} = 3\overrightarrow{CB} \quad \overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{CD} \quad \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$$

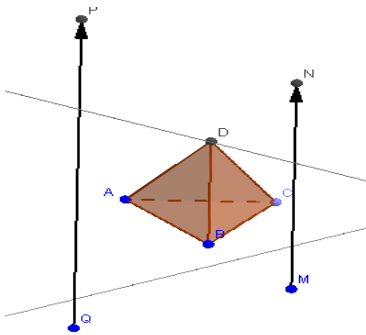
1) Tracer une figure

2) Ecrire  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{PQ}$  en fonction de  $\overrightarrow{BD}$

3) En déduire que  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{PQ}$  sont colinéaires

4) Que peut-on dire des droites  $(MN)$  et  $(PQ)$

**Solution :1)**



$$2) \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = 2\overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ} = -3\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{CB} = -3(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB})$$

$$\overrightarrow{PQ} = -3(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}) = -3(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = -3\overrightarrow{BD}$$

$$3) \text{ on a } \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BD} \text{ donc } \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} \text{ ①}$$

$$\text{on a } \overrightarrow{PQ} = -3\overrightarrow{BD} \text{ donc } \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} \text{ ②}$$

$$\text{de ① et ② on trouve : } \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} \text{ donc } \overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$$

donc :  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{PQ}$  sont colinéaires

4) on a  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{PQ}$  sont colinéaires

Donc  $(MN)$  et  $(PQ)$  sont parallèles

**Exercice07 :**  $ABCD$  un tétraèdre et  $E$  le milieu du  $[BC]$  et soit les points  $K$  ;  $L$  tel que :

$$\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \text{ et } \overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

Montrer que  $(LD) \parallel (EK)$

**Solution :** pour montrer que  $(LD) \parallel (EK)$  il suffit

de montrer que :  $\overrightarrow{LD}$  ,  $\overrightarrow{EK}$  sont colinéaires ??

$$\text{On a : } \overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \text{ on utilisant la Relation de}$$

Chasles

$$\text{Donc : } \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{EK} = \left( \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \text{ et}$$

$$\text{puisque : } \overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AE}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{EK} = \left( \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\text{Alors : } \overrightarrow{EK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \text{ ①}$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{et puisque : } \overrightarrow{LD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \text{ ②}$$

$$\text{de ① et ② on déduit que : } \overrightarrow{EK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LD}$$

donc :  $(LD) \parallel (EK)$

**Exercice08 :**  $ABCDEFGH$  un cube

$K$  est le symétrique du point  $D$  par rapport à  $H$

Montrer que  $(AK) \parallel (BCG)$

**Solution :** on a :  $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CG}$

donc : Les vecteurs  $\overrightarrow{AK}$  ,  $\overrightarrow{CB}$  et  $\overrightarrow{CG}$  sont coplanaires

on déduit que :  $\exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{CB} + y\overrightarrow{CG}$

donc :  $(AK) \parallel (BCG)$