Prof : Mouad ZILLOU	Durée : 8 heures	Calcul trigonométrique	Niveau : 1B.S.E.F
Les capacités attendues	• Maitriser les différentes formules de transformations. • résoudre des équations et des inéquations trigonométriques se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations fondamentales. • Représentation et lire les solutions d'une équation ou d'une inéquation sur le cercle trigonométrique.		
Prérequis	• Formules de transformations. • Transformation de l'expression : $a\cos x + b\sin x$. • Equations et inéquations trigonométriques		
Recommandations pédagogiques	• On optera pour la simplicité lors de la présentation de ce chapitre en utilisant toute technique à la portée aux élèves. • On utilisera le cercle trigonométrique pour résoudre une inéquation trigonométrique simple sur un intervalle de IR.		
Fichiers utilisés dans la préparation du cours	• Les orientations pédagogiques.+ Livre d'élève + Des sites électroniques • Distribution périodique du programme de mathématiques.		
Rôle de l'enseignant	• Ecrire l'activité au tableau + Marquer les difficultés + Répartir les tâches + Donner une durée suffisante pour la recherche individuelle + Diagonaliser les prérequis des apprenants + Noter les observations		
Rôle de l'apprenant	• Ecrire les activités + Répondre aux questions de l'activité avec la justification de ses solutions. • Formuler les résultats de l'activité sous forme d'un théorème, une propriété + Répondre aux exercices		

Durée	Activités	Résumé du cours	Evaluations et remarques
	☞***Activité ①*** (C) un cercle trigonométrique de centre O et $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé direct lié au (C) . Soient A et B deux points de (C) d'abscisse curvilignes a et b respectivement Remarquons que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \equiv b-a[2\pi]$. 1) Montrer que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\cos(a-b)$ 2) Ecrire $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ 3) En utilisant l'expression analytique du produit scalaire calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$. 4) Déduire que $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$. 5) Remarquons que $a+b=a-(-b)$ déduire que $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ 6) Remarquons que $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$. Déduire que $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$ et $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$. ☞***Activité ②*** Soient a et b des nombres réels tels que $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$, $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$, $a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$ et $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$ Montrer que $\tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$ et $\tan(a-b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$	**I. Formules de transformation** ***Propriété ①*** Soient a et b des nombres réels on a $\otimes\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$ $\otimes\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$ $\otimes\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ $\otimes\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$ ***Exemple*** On a $\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$ Donc $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ Alors $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=0\times\frac{1}{2}-1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ Alors $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$ ***Propriété ②*** Soient a et b des nombres réels tels que $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$ et $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$, et • Si $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$ on a $\tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$ • Si $a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$ on a $\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$	***Application ①*** 1) Calculer $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ sachant que $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$. 2) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ sachant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$. 3) Soit $x\in\mathbb{R}$; simplifier les expressions suivantes $A(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ et $B(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$. ***Application ②*** 1) Soit x un nombre réel tel que $x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$ et $x\neq\frac{-\pi}{4}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$ Simplifier l'expression suivante $A=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\times\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ 2) Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ sachant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$.

Activité 03

On remarque que $2a = a + a$

1) Calculer $\cos(2a)$; $\sin(2a)$

2) Déduire que $\cos^2(a)$ et $\sin^2(a)$ en fonction de $\cos(2a)$

3) Si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$ et $2a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$

Calculer $\tan(2a)$

Activité ③

Simplifier les expressions suivantes

$\cos(a+b) - \cos(a-b)$ $\quad$ $\cos(a+b) + \cos(a-b)$

$\sin(a+b) - \sin(a-b)$ $\quad$ $\sin(a+b) + \sin(a-b)$

Propriété ③ :

Soit $a \in \mathbb{R}$ on a

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$;
- $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$
- $\cos^2(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$;
- $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$
- si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$ et $2a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$ alors

$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$

II. Transformation d'un produit en une somme – Transformation d'une somme en un produit

1. Transformation d'un produit en une somme

Propriété ④

Soient a et b deux nombres réels on a

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\sin a \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
- $\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

2. Transformations d'une somme en un produit

On pose $p = a + b$ et $q = a - b$ alors $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$

Propriété ⑤

Soient p et q deux nombres réels on a

- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Application ③

1) On remarque que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$.

   Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ .montrer que

   $1 + \cos(x) + 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2$

3) Soit $x \neq k\pi / k \in \mathbb{Z}$. Montrer que

   $\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Application ④

1) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et

   $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

2) Montrer que

   $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos^2(x) - \frac{3}{4}$

3) Ecrire sous forme d'une somme les expressions suivantes

   $A(x) = \sin(x)\sin(3x)\sin(5x)$ et

   $B(x) = \cos(x)\cos(3x)\cos(5x)$

Application ⑤

1) a) Transformer en produit les expressions suivantes

   $A(x) = \sin(x) + \sin(7x)$ et

   $B(x) = \sin(3x) + \sin(5x)$

   b) Déduire que

   $A(x) + B(x) = 4\cos(x)\cos(2x)\sin(4x)$

2) Montrer que

   $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

- $\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos(p)+\cos(q)=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

III. *Transformation de l'expression* $a\cos(x)+b\sin(x)$

Introduction

Soient a et b deux nombres réels tels que $(a;b)\neq(0;0)$

On considère l'expression suivante $a\cos(x)+b\sin(x)$

On a $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$

Or on a $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$

Donc $\exists\alpha\in\mathbb{R}/\begin{cases}\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$

D'où $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x)$.

Par conséquent $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\,\cos(x-\alpha)$.

Propriété ⑥

Soient a et b deux nombres réels tels que $(a;b)\neq(0;0)$

Il existe un nombre réel α tel que

$$a\cos x+b\sin x=r\cos(x-\alpha).$$

Avec $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Exemple

Transformer l'expression suivante $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)$

On a $a=\sqrt{3}$ et $b=1$ donc $r=\sqrt{a^2+b^2}=2$

Donc

$$\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)\right)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

Remarque

On peut écrire l'expression $a\cos(x)+b\sin(x)$ sous forme $a\cos x+b\sin x=r\sin(x+\beta)$

Avec $\sin\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Application ⑥

Ecrire sous forme de $r\cos(x-\alpha)$ les expressions suivantes

$A(x)=\cos(x)+\sin(x)$;

$C(x)=\sqrt{2}\cos(x)+\sqrt{2}\sin(x)$

$B(x)=\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)$;

$D(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

Et aussi

$$\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

IV. Equations et inéquations trigonométriques

Rappel

⊗ $\cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ x=-\alpha+2k\pi \end{cases} \quad / k\in\mathbb{Z}$

⊗ $\sin x=\sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \end{cases} \quad / k\in\mathbb{Z}$

⊗ $\tan x=\tan\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi \quad / k\in\mathbb{Z}$

Remarque

Les inéquations trigonométriques se résoudre à l'aide du cercle trigonométrique

Application ⑦

1) Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle I

$2\cos x-\sqrt{3}=0$	$I=\left]-\pi;\pi\right]$
$\sqrt{2}\sin x+1=0$	$I=\left]-\pi;\pi\right]$
$tanx=\sqrt{3}$	$I=\left[0,2\pi\right]$
$\sqrt{3}\cos x-\sin x=\sqrt{2}$	$I=\left[-\pi,\pi\right]$

2) Résoudre dans I les inéquations suivantes :

* $2\cos x-\sqrt{3}\geq 0$; $I=\left]-\pi;\pi\right]$
* $\sqrt{2}\sin x+1\leq 0$; $I=\left]-\pi;\pi\right]$
* $\cos x>\frac{-\sqrt{2}}{2}$; $I=\left[0;2\pi\right]$
* $(\sqrt{2}\sin x+1)(2\cos x-\sqrt{3})\geq 0$
  $I=\left]-\pi;\pi\right]$