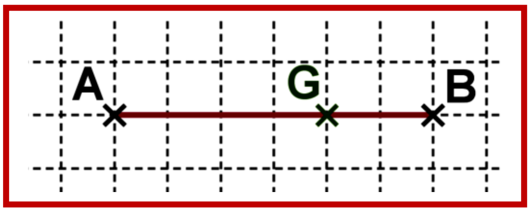
I. Barycentre de deux points pondérés :

1 deux points pondérés – le barycentre de deux points pondérés

[



Vocabulaire :

Dans l'écriture : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

- Le nombre a s'appelle le poids du point A, on dit que le point A est affecté de coefficient a.
- Le couple (A,a) est appelé point pondéré .
- L'ensemble $S=\{(A,a),(B,b)\}$ est appelé système pondéré .
- Le cas d'où $a+b\neq 0$ le point G s'appelle barycentre du système pondéré S .
- Si $a=b$ et $a\neq 0$ le point G s'appelle isobarycentre de A et B ou centre de gravité du $[A,B]$.

Définition et théorème :

Soient (A,a) et (B,b) deux points pondérés du plan $(\mathcal{P})$, tel que $A\neq B$ et a et b de $\mathbb{R}$.

- Si $a+b\neq 0$ alors il existe un point unique G de $(\mathcal{P})$ tel que : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

Exemple:

2- Propriétés du barycentre de deux points pondérés :

2-1 Invariance :

2-2 Théorème :

- Si G est barycentre du système pondéré $S=\{(A,a),(B,b)\}$ alors pour tout k de $\mathbb{R}^*$ on a aussi G est barycentre du système pondéré $\{(A,ka),(B,kb)\}$.
- barycentre de deux points pondérés ne change pas si on multiplie leurs poids (ou coefficients) par le même réel non nul .

Exemple:

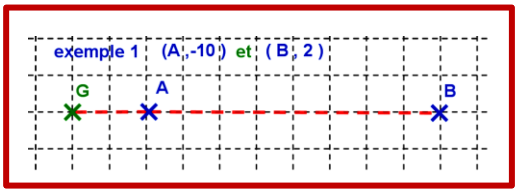
2-3 propriété caractéristique :

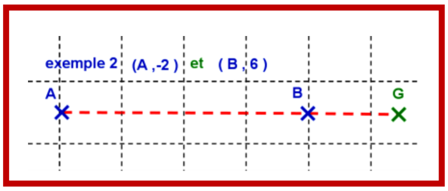
- (G est barycentre du système pondéré $S=\{(A,a),(B,b)\}$) si et seulement si : ($a+b\neq 0$ et $\forall M\in(\mathcal{P}):a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$) .
- Les points A et B et C sont alignés et $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

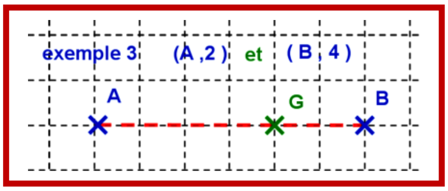
Exemple 1 $\{(A,-10),(B,2)\}$

exemple 2 $\{(A,-2),(B,6)\}$

exemple 3 $\{(A,2),(B,4)\}$







3 Application :

a. Déterminer l'ensemble des points M du plan $(\mathcal{P})$ tel que : $\left\|2\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\right\|=12$.

b. Déterminer l'ensemble des points M du plan $(\mathcal{P})$ tel que : $\left\|2\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|4\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$.

Correction :

a. On détermine l'ensemble des points :

On considère le point G barycentre de $\{(A,2),(B,4)\}$ d'après la propriété caractéristique on obtient : $\left\|2\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\right\|=6 \Leftrightarrow \left\|6\overrightarrow{MG}\right\|=12$

$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MG}\right\|=2$$

$$\Leftrightarrow \quad MG=2$$

Conclusion : l'ensemble des points M du plan $(\mathcal{P})$ est le cercle $\mathcal{C}(G,2)$.

b. On détermine l'ensemble des points :

On considère le point G barycentre de $\{(A,2),(B,4)\}$ et le point G' barycentre de $\{(A,4),(B,2)\}$ d'après la propriété caractéristique on obtient :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|4\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\| \Leftrightarrow \left\|6\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|6\overrightarrow{MG'}\right\|$$

$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{MG'}\right\| \Leftrightarrow MG=MG'$$

Conclusion : l'ensemble des points M du plan $(\mathcal{P})$ est la médiatrice du segment $[GG']$

2-4 Cordonnées du point G barycentre de $S=\{(A,a),(B,b)\}$

Propriété :

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ et $G(x_G,y_G)$ points de $(\mathcal{P})$.

Le point G barycentre de $S=\{(A,a),(B,b)\}$ on a : $x_G=\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b}$ et $y_G=\dfrac{ay_A+by_B}{a+b}$

II. Barycentre de trois points pondérés :

?

1- Définition et théorème :

Soient (A,a) et (B,b) et (C,c) trois points pondérés du plan $(\mathcal{P})$, tel que a et b et c de $\mathbb{R}$.

- Si $a+b+c\neq 0$ alors il existe un point unique G de $(\mathcal{P})$ qui vérifie: $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
- le point G s'appelle barycentre du système pondéré $\{(C,c);(B,b);(A,a)\}$

2 Propriétés du barycentre de deux points pondérés :

2-1 Invariance :

a. Théorème :

- **Si G est barycentre du système pondéré $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ alors pour tout k de $\mathbb{R}^*$ on a aussi G est barycentre du système pondéré $\{(A,ka),(B,kb),(C,kc)\}$.**
- **barycentre de trois points pondérés ne change pas si on multiplie leurs poids (ou coefficients) par le même réel non nul .**

2-2 propriété caractéristique :

a. Propriété caractéristique :

- **G est barycentre du système pondéré $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$) si et seulement si :**
  ($a+b+c\neq 0$ et $\forall M\in(\mathcal{P})$: $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$) .

2-3 Associativité du barycentre ou barycentre partiel :

a. Théorème :

Le barycentre de trois pondérés ne change pas si on remplace deux points du système par leur barycentre avec un poids qui est la somme de leur poids

Ou encore G_2 est barycentre de $\{(A,a),(B,b)\}$ (avec $a+b\neq 0$) et on a G est barycentre de $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ alors G est barycentre de $\{(C,c),(G_2,a+b)\}$

c. Exemples :

- **Centre de gravité d'un triangle :**
  G est barycentre de $\{(C,1);(B,1);(A,1)\}$ (centre de gravité d'un triangle ABC) .

A' est le milieu de $[BC]$ donc A' est barycentre de $\{(C,1);(B,1)\}$. D'où G est barycentre de $\{(A',2);(A,1)\}$ donc : $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AA'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

- G est barycentre de $\{(C,3);(B,-2);(A,-2)\}$.

On considère G_2 est barycentre de $\{(A,-2),(B,-2)\}$ donc G_2 est le milieu de $[AB]$.

D'où : G est barycentre de $\{(C,3),(G_2,-4)\}$ Par suite : $\overrightarrow{CG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{CG_2}=\frac{-4}{-1}\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AB}$

2-4 Cordonnées du point G barycentre de $S=\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$

c. Propriété :

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ et $C(x_C,y_C)$ et $G(x_G,y_G)$ points de $(\mathcal{P})$.

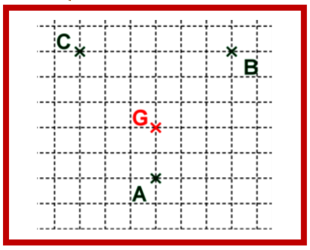
Le point G barycentre de $S=\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ on a :

$$x_G=\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c} \text{ et } y_G=\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}$$

2-5 Construction : de G est barycentre du système pondéré $S=\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$.

Exemple 1

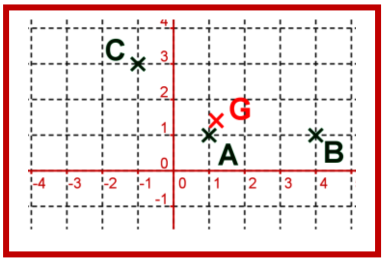
Construire G barycentre de $S=\{(C,1);(B,1);(A,3)\}$



exemple 2 :

dans le plan $(\mathcal{P})$ rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ on considère les points pondérés $(A(1,1);3)$ et $(B(4,1);1)$ et $(C(-1,3);1)$. déterminer les cordonnées de leurs barycentre

$G(a,b)$



III. Barycentre de quatre points pondérés :

1 Barycentre de quatre points pondérés :

b. Définition et théorème :

Soient (A,a) et (B,b) et (C,c) et (D,d) quatre points pondérés du plan $(\mathcal{P})$, tel que a et b et c et d de $\mathbb{R}$.

- Si $a+b+c+d\neq 0$ alors il existe un point unique G de $(\mathcal{P})$ qui vérifie: $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}+d\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.
- le point G s'appelle barycentre du système pondéré $\{(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)\}$ (ou

2 Propriétés du barycentre de deux points pondérés :

01. Invariance :

a. Théorème :

- Si G est barycentre du système pondéré $\{(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)\}$ alors pour tout k de $\mathbb{R}^*$ on a aussi G est barycentre du système pondéré $\{(A,ka),(B,kb),(C,kc),(D,kd)\}$.
- barycentre de quatre points pondérés ne change pas si on multiplie leurs poids (ou coefficients) par le même réel non nul .

02. propriété caractéristique :

a. Propriété caractéristique :

- G est barycentre du système pondéré $\{(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)\}$) si et seulement si : ($a+b+c+d\neq 0$ et $\forall M\in(\mathcal{P})$: $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}+d\overrightarrow{MD}=(a+b+c+d)\overrightarrow{MG}$) .

03. Associativité du barycentre ou barycentre partiel :

a. Théorème :

Le barycentre de quatre points pondérés ne change pas si on remplace deux points ou bien trois points du système par leur barycentre avec un poids qui est la somme de leur poids (ou avec un coefficient qui est la somme de leur coefficients)

- Ou encore G_1 est barycentre de $\{(A,a),(B,b)\}$ (avec $a+b\neq 0$) et on a G_2 est barycentre de
- $\{(C,c),(D,d)\}$ (avec $c+d\neq 0$) alors G est barycentre de $\{(G_1,a+b),(G_2,c+d)\}$
- Ou encore G_3 est barycentre de $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ (avec $a+b+c\neq 0$) alors G est barycentre de $\{(G_3,a+b+c),(D,d)\}$

04. Cordonnées du point G barycentre de $S=\{(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)\}$

d. Propriété :

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ et $C(x_C,y_C)$ et $D(x_D,y_D)$ et $G(x_G,y_G)$ points de $(\mathcal{P})$.

Le point G barycentre de $S=\{(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)\}$ on a :

$$x_G=\frac{ax_A+bx_B+cx_C+dx_D}{a+b+c+d} \quad \text{et} \quad y_G=\frac{ay_A+by_B+cy_C+dy_D}{a+b+c+d}$$