Durée	activités	Résumer du cours	Evaluation
2h	***Activité 1*** Soit f une fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ 1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f 2) Montrer que $\left(\forall x\in D_f\right);\ f(x)\le 1$ 3) Montrer que $\left(\forall x\in D_f\right);\ f(x)\ge 0$ 4) Déduire que $\left(\forall x\in D_f\right);0\le f(x)\le 1$	**I. *Généralités*** **1. *Fonction majorée – fonction minorée – fonction bornée*** ***Définition*** Soit f une fonction définie un intervalle I $\left(I\subset\mathbb{R}\right)$. On dit que : * f est ***majorée*** sur I s'il existe un nombre réel M tel que $\left(\forall x\in I\right);\ f(x)\le M$ * f est ***minorée*** sur I s'il existe un nombre réel m tel que $\left(\forall x\in I\right);\ f(x)\ge M$ * f est ***bornée*** sur I s'elle est majorée et minorée sur I $\left(\left(\forall x\in I\right);m\le f(x)\le M\right)$. ***Remarque :*** *Si f est majorée par M sur I alors $\left(C_f\right)$ est au-dessous de la droite d'équation $y=M$ sur I. *Si f est minorée par m sur I alors $\left(C_f\right)$ est au-dessus de la droite d'équation $y=m$ sur I **Exemple** Montrer que $f:x\mapsto\dfrac{1}{x^2+2}$ est majorée par $\dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$ On a $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);x^2\ge 0\Rightarrow x^2+2\ge 2\Rightarrow\dfrac{1}{x^2+2}\le\dfrac{1}{2}$ Donc $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\ f(x)\le\dfrac{1}{2}$, par suite f est majorée par $\dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$. ***Propriété*** : Soit f une fonction définie un intervalle I $\left(I\subset\mathbb{R}\right)$. f est dite ***bornée*** sur I ; si $\exists k\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\lvert f(x)\rvert\le k$	**Exercice 01** : **1)** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ Montrer que f est majorée par 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ **2)** Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$ a) Déterminer D_g. b) Montrer que la fonction g est majorée par 1 et minorée par -3. c) Interpréter les résultats géométriquement. **Exercice 02** Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\sin(x)+\cos(x)$. Montrer que $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\lvert f(x)\rvert\le 3$

1h

2. *Extremums d'une fonction numérique*

Définition

Soit f une fonction définie sur I et soit a un élément de I.
On dit $f(a)$ est une **valeur minimale** de f sur I si pour tout x de I on a $f(x) \geq f(a)$.
On dit $f(a)$ est une **valeur maximale** de f sur I si pour tout x de I on a $f(x) \geq f(a)$
Si $f(a)$ est une valeur maximale ou une valeur minimale de f sur I alors le point $A\left(a; f(a)\right)$ est un **extremum** de f sur I.

1h

3. *Fonction périodique*

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition et soit T un nombre réel.
On dit que f est une fonction **périodique** et T sa période si et seulement si :

$\forall x \in D_f$ on a $\begin{cases} (x+T) \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$

Exemple

$f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto \sin(x)$ sont des fonctions périodiques et 2π leur période.
$h : x \mapsto \tan(x)$ est une fonction périodique et π sa période.

Remarque

Si f est une fonction périodique et T alors
$(\forall x \in D_f), (\forall k \in \mathbb{Z})$ on a $f(x+kT) = f(x)$

2h

4. *Comparaison de deux fonctions*

Egalité de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions numériques et D_f et D_g ses ensembles de définitions respectives.

Exercice 03

Soit f une fonction définie par

$f(x) = x + \dfrac{4}{x}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f
2) Montrer que $f(2)$ est une valeur minimale de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
3) Montrer que $f(-2)$ est une valeur maximale de la fonction f sur $]-\infty;0[$
4)

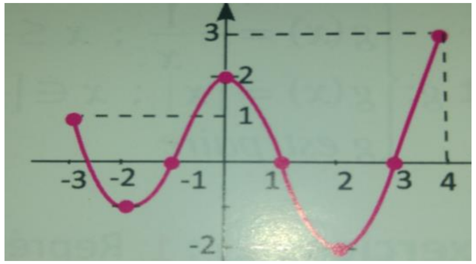
Exercice 04

Soient f, g et h trois fonctions numériques telles que $f(x) = \cos^2(x)$, $g(x) = \sin(2\pi x)$ et $h(x) = \tan(2x)$
Montrer que les fonctions f, g et h sont des fonctions périodiques et $\pi ; 1$ et $\dfrac{\pi}{2}$ sont respectivement leurs périodes.

Exercice 05

1) Etudier l'égalité de f et g dans les cas suivants :

- $f(x) = \dfrac{x}{x^2}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = \sqrt{(x+1)^2}$ et $g(x) = x+1$
- $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ et $g(x) = x-1$.

		On dit que f et g sont ***égales*** si les deux conditions suivantes sont vérifiées : • $D_f = D_g = D$ • $(\forall x \in D); f(x) = g(x)$ Soient f et g deux fonctions numériques définies sur I . On dit que f est inférieur ou égal à g si et seulement si $(\forall x \in I); f(x) \leq g(x)$ et on écrit $f \leq g$ ***<u>Interprétation graphique</u>*** Si $f \leq g$ alors (C_f) est au-dessous de (C_g) sur I . Si $f \geq g$ alors (C_f) est au-dessus de (C_g) sur I . Si $f \leq 0$ alors (C_f) est au-dessous d'axe des abscisses sur I . Si $f \geq 0$ alors (C_f) est au-dessus d'axe des abscisses sur I . **5. *<u>Image d'un intervalle par une fonction</u>*** ***<u>Définition</u>*** Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I $(I \subset D_f)$. L'ensemble des éléments $f(x)$, tel que $x \in I$, s'appelle l'image de l'intervalle I par la fonction f et se note $f(I)$ telle que $f(I) = \{f(x) / x \in I\}$. ◎***<u>Technique</u>*** Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et soit $[a;b]$ un intervalle de I Si f est croissante sur $[a;b]$ alors $f([a;b]) = [f(a); f(b)]$.	**2)** Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = -2x^2 + 4x + 1$ a- Comparer f et g pour tout x dans ces intervalles suivants $]-\infty; 0]$; $]2; +\infty[$ et $[0; 2]$. b- Déduire les positions relatives des courbes sur $]-\infty; 0]$; $]2; +\infty[$ et $[0; 2]$ **<u>Exercice 06</u>** Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [-3; 4]$ dont la courbe est la suivante  **1)** Dresser le tableau de variations de f sur I **2)** Déterminer les extremums de la fonction f , puis le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ **3)** Déterminer graphiquement : $f([-2;0])$, $f([-3;-2])$, $f(]0;2[)$ et $f([3;4])$.

2h		Si f est décroissante sur $[a;b]$ alors $f([a;b])=[f(b);f(a)]$. Si f change la monotonie sur $[a;b]$ alors $f([a;b])=[V_{\min};V_{\max}]$ où $V_{\min}$ et $V_{\max}$ sont respectivement la valeur minimale et la valeur maximale de f sur I. **6. *Monotonie d'une fonction numérique*** ***a. Définition*** Soit f une fonction définie sur I et soient a et b deux nombres réels dans I 6. Si $a<b$ et $f(a)<f(b)$ alors on dit que la fonction f est **strictement croissante** sur I 7. Si $a<b$ et $f(a)>f(b)$ alors on dit que la fonction f est **strictement décroissante** sur I. 8. Si $a<b$ et $f(a)=f(b)$ alors on dit que la fonction f est **constante** sur I. ***b. Monotonie et parité*** ***Propriété*** Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition symétrique par rapport à 0 et soit I un intervalle de $\mathbb{R}^+$ et J son symétrique par rapport à 0 **Si f est paire :** Si f est croissante sur I alors f est décroissante sur J Si f est décroissante sur I alors f est croissante sur J. **Si f est impaire.** La fonction f garde le même sens de variations sur I et sur J. ***c. Monotonie de $f+k$ et $k.f$*** ***Propriété***	**Exercice 07** Soit f une fonction numérique définie par $f(x)=\frac{3}{x}+\frac{x}{3}$ 1) Déterminer D_f 2) Etudier la parité de la fonction f 3) Montrer que pour tous a et b dans $]0;+\infty[$; on a $T=\frac{ab-9}{3ab}$. 4) Déduire le sens de variations de la fonction f sur $[3;+\infty[$ et $]0;3]$ 5) Dresser le tableau de variations de f sur D_f en précisant sa valeur maximale et sa valeur minimale. 6) Soit f une fonction définie par :

x	-4		-3		1	3	4
$f(x)$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	||		

a) Compléter le tableau si f est **paire**.
b) Compléter le tableau si f est **impaire**.

Exercice 08

2h

2h

Activité 02

On considère les fonctions f et g telles que : $f(x)=\sqrt{x-2}$ et $g(x)=x-1$

1)

a) Calculer $g(5)$ puis déduire $f\left(g(5)\right)$

b) Calculer $g(4)$ puis déduire $f\left(g(4)\right)$

c) Peut-on calculer $f\left(g(1)\right)$?

2) Déterminer un intervalle I tel que $(\forall x\in I);\ f\left(g(x)\right)\in\mathbb{R}$, puis déduire l'expression de $f\left(g(x)\right)$ pour tout $x\in I$

Soit f une fonction numérique et $k\in\mathbb{R}^*$

- La fonction $f+k$ et la fonction f ont même sens de variations.
- Si $k>0$ alors la fonction $k.f$ et la fonction f ont même sens de variations
- Si $k<0$ alors la fonction $k.f$ et la fonction f ont des sens de variations contraires

II. Composée de deux fonctions

1. Définition

Soit f une fonction numérique définie sur I et soit g une fonction numérique définie sur J telle que $(\forall x\in I);\ f(x)\in J$.

La composée de la fonction f et g ,dans cet ordre, est la fonction qu'on note gof telle que $(\forall x\in I); gof(x)=g\left(f(x)\right)$.

Remarque

- ○ Ensemble de définition de gof est : $D_{gof}=\left\{x\in\mathbb{R} / x\in D_f \text{ et } f(x)\in D_g\right\}$
- ○ $x\in D_{gof}\Leftrightarrow x\in D_f$ et $f(x)\in D_g$.

2. La monotonie de la composée de deux fonctions

Propriété

Soit f une fonction numérique définie sur I et soit g une fonction numérique définie sur J telle que $(\forall x\in I);\ f(x)\in J$.

- Si f et g ont même sens de variations alors la fonction gof est croissante sur I .
- Si f et g ont des sens de variations contraires alors la fonction gof est décroissante sur I .

Exemple

Soit f une fonction numérique dont le tableau de variations est comme suit

x	-3	0	1	$\frac{5}{2}$	4
$f(x)$	5 ↘	1 ↗	3 ↘	-2 ↗	7

Dresser le tableau de variations de $f-3$

Dresser le tableau de variations de $2f$ et $-2f$

Exercice 09

Soient f et g les fonctions définies par :

$f(x)=x^2+1$ et $g(x)=\dfrac{3x}{x-1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f ; g ; gof et fog .

2) Déterminer l'expression de $(gof)(x)$ pour tout $x\in D_{gof}$ et $(fog)(x)$ pour tout $x\in D_{fog}$.

3) Écrire sous forme d'une composée de deux fonctions dans les cas suivants :

$h:x\mapsto\dfrac{x^2}{x^2+8}$; $h:x\mapsto\dfrac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3}$;

$h:x\mapsto\dfrac{x^2+1}{|x|+3}$

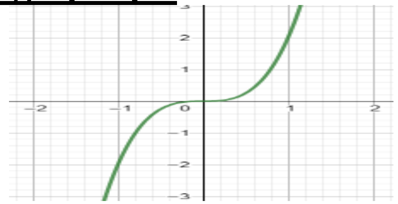
4) Soient u et w deux fonctions telles que

$v(x)=x-1$ et $w(x)=2x^2+3x-1$

2h		Soient f et g deux fonctions telles que $f(x)=x-1$ et $g(x)=\sqrt{x}$ Soit h une fonction numérique définie par $h=gof$ Etudier la monotonie de la fonction h sur D_h **III. Représentation graphique des fonction $x\mapsto\sqrt{x+a}$ et $x\mapsto ax^3$** ***La représentation graphique de la fonction $x\mapsto ax^3$ $(a\neq 0)$*** On considère f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^3$ $(a\neq 0)$ et (C_f) sa courbe dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. ***Parité de la fonction f*** On a $(\forall x\in\mathbb{R})$; $-x\in\mathbb{R}$ et $f(-x)=a(-x)^3=-ax^3=-f(x)$ Donc f est une fonction impaire. ****Variations de f*** f est une fonction impaire, alors il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$ $*$ ***Si*** $a>0$ Soient x et y dans $\mathbb{R}^+$ tels que $x<y$ $x<y\Rightarrow x^3<y^3\Rightarrow ax^3<ay^3\Rightarrow f(x)<f(y)$ Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ f est une fonction impaire, alors f est croissante aussi sur $\mathbb{R}^-$ Par conséquent f est croissante sur $\mathbb{R}$ **Tableau de variations**	Déterminer la fonction u telle que $w=uov$ **Exercice 10** On considère les fonctions suivantes : $f(x)=x^2-2x-1$ et $g(x)=\frac{x-2}{x+2}$ **1)** Déterminer D_f et D_g **2)** Déterminer D_{gof} puis calculer $gof(x)$ **3)** Dresser le tableau de variations de gof **Exercice 11** Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x)=2x^3$ et $g(x)=\sqrt{x+3}$ Soient (C_f) et (C_g) respectivement les courbes de f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ **1)** Vérifier que $f(1)=g(1)$, puis interpréter le résultat graphiquement. **2)** Dresser le tableau de variations de f et g. **3)** a-Construire les courbes dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. b- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

Représentation graphique



Si $a<0$

Soient x et y dans $\mathbb{R}^+$ tels que $x<y$

$x<y \Rightarrow x^3<y^3 \Rightarrow ax^3>ay^3 \Rightarrow f(x)>f(y)$

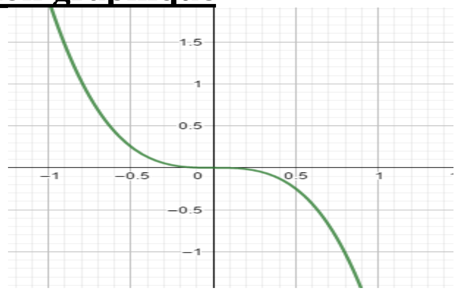
Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$

f est une fonction impaire , alors f est décroissante aussi sur $\mathbb{R}^-$. Par conséquent f est décroissante sur $\mathbb{R}$

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$

Représentation graphique



c- Déterminer graphiquement $f([3;+\infty[)$

4) a-Déterminer D_{fog} .

b- Étudier les variations de la fonction fog à partir des variations des fonctions f et g sur $[3;+\infty[$

c- Calculer $fog(x)$ pour tout D_{fog} .

2. ***Représentation graphique de la fonction*** $x \mapsto \sqrt{x+a}$

On considère f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x+a}$ et (C_f) sa courbe dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

****Domaine de définition*** $D_f = [-a;+\infty[$

****Variations de*** f

Soient x et y dans D_f tels que $x<y$

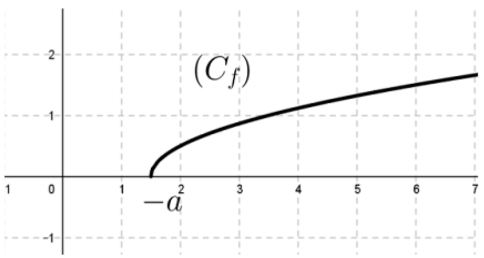
$x<y \Rightarrow x+a<y+a \Rightarrow \sqrt{x+a}<\sqrt{y+a} \Rightarrow f(x)<f(y)$

Donc f est croissante sur $[-a;+\infty[$

Tableau de variations

x	$-a$	$+\infty$
$f(x)$		

Représentation graphique



On peut construire la courbe de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x+a}$ à partir de la courbe d'une fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en utilisant une translation de vecteur $-a\vec{i}$