Etapes	Contenu	observations

Activité d'initiation

I. Proposition – fonction propositionnelle

1. Proposition

1) Cocher la case convenable :

Enoncé	*Vrai*	*Faux*
Tout nombre pair est divisible par 4		
La somme de deux nombres pairs est un nombre pair		
La fonction $f : x \mapsto x^2$ est une fonction paire		
Le nombre 214 est un multiple de 3		

2) Y a-t-il des énoncés sont vrais et faux au même temps.

Résumer du cours

➪ Définition

On appelle une ***proposition*** un énoncé mathématique (texte mathématique) qui a un sens pouvant être vrai ou faux (mais pas les deux en même temps), et se note souvent par les lettres P,Q ou R,.....

Remarque

- L'adjectif « vrai » ou « faux » qui accompagne la proposition s'appelle « ***valeur de vérité*** »
- Si P est une proposition vraie, on dit alors que la valeur de vérité de P est « Vrai » et se note « V » et Si P est une proposition fausse, on dit alors que la valeur de vérité de P est « faux » et se note « F ».

Table de vérité

P	
V	F

Ou

P	
1	0

60 minutes

Exemples

$P:"3\times2=6"$ V • $Q:"$ -1 est une solution de l'équation $x^2-2x+3=0"$ F

➪ Opérations sur les propositions

➪ Négation d'une proposition

Etant donné une proposition P .
La négation de la proposition P, est la proposition qui a une valeur de vérité « faux » si la proposition P est vraie, et une valeur de vérité « vrai » si la proposition P est fausse est se note $\overline{P}$ ou $\neg P$.

Table de vérité

p	$\overline{P}$
V	**F**
F	**V**

Remarque

Symbole	*Négation*
$=$	$\neq$
$<$	$\geq$
$>$	$\leq$
$\leq$	$>$
$\geq$	$<$
$\in$	$\notin$

Evaluation

Application ①

Donner la négation des propositions suivantes, en précisant la valeur de vérité

- $P:"\sqrt{17} \leq \sqrt{8}+\sqrt{9}"$; • $Q:"\pi \in □"$; • $R:"\frac{4}{5} \neq \frac{16}{25}"$

Résumer du cours

➯ *Conjonction de deux propositions*

La conjonction de deux proposition P et Q est la proposition qui est vrai uniquement si les deux propositions Pet Q sont vraies en même temps et se note (P et Q) ou ($P \wedge Q$).

Table de vérité

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Evaluation

Application ②

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $P:"3 \in □$ ***et*** $3 \times 5 = 14"$.
- $Q:"$ 5 divise 35 ***et*** 5 est un nombre premier"
- $R:"$ Le nombre $x = 7$ ***et*** $4x - 28 = 0"$.
- $S:"$ 12 est un nombre impair ***et*** $12 \succ 0"$

Résumer du cours

➯ *Disjonction de deux propositions*

La disjonction de deux proposition P et Q est la proposition qui une valeur de vérité « vrai » si au moins l'un des deux propositions est vraie on la note (P ou Q) ou $P \vee Q$.

Table de vérité

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

120 minutes

Evaluation

Application ③

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $P:"\sqrt{2} \in □$ ***ou*** $0 \neq 5"$.
- $Q:"12 \leq 7$ ***ou*** 5 est un nombre pair" .
- $R:"3+3=5$ ***ou*** $7^2 > 36"$.

➯ *Implication de deux propositions*

L'implication de deux proposition P et Q est la proposition qui une valeur de vérité « faux » si la proposition P est vraie et la proposition Q est fausse et on la note $P \Rightarrow Q$.

$P \Rightarrow Q$: se lit P implique Q ou bien « si P alors Q ».

Résumer du cours

Table de vérité

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Evaluation

Application ④

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $P:"2<5 \Rightarrow -1^2=1"$; • $S:"0>3 \Rightarrow$ 3 est un nombre paire" .
- $Q:"2^2=-4 \Rightarrow \sqrt{25}=5"$; • $T:"6=2\times 3 \Rightarrow$ 37 est un nombre premier"

Résumer du cours

Remarque

- L'implication $Q \Rightarrow P$ s'appelle l'implication réciproque de $P \Rightarrow Q$.
- $"P \Rightarrow Q"$ et $"Q \Rightarrow P"$ n'ont pas nécessairement même valeur de vérité.

Exemple

- $P:"$ 4 est un nombre pair" ; $Q:"-3>0"$.

La proposition $"P \Rightarrow Q"$ est fausse mais la proposition $"Q \Rightarrow P"$ est vraie.

- $P:"3=1.5"$; $Q:"$ 36 divise 8".

La proposition $"P \Rightarrow Q"$est vraie et aussi la proposition $"Q \Rightarrow P"$ est vraie.

Résumer du cours

➪ ***Equivalence de deux propositions***

L'équivalence de deux proposition P et Q est la proposition qui une valeur de vérité « vrai » si P et Q ont même valeur de vérité on la note $P \Leftrightarrow Q$.
$P \Leftrightarrow Q$: se lit P équivalente la proposition Q .

Table de vérité

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Evaluation

Application ⑤

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $P:"$ ABC un triangle rectangle en A $\Leftrightarrow AB^2+AC^2=BC^2"$.
- $Q:"x^2+1>0 \Leftrightarrow -4 \in$ □ " .
- $R:"4\times 3=20 \Leftrightarrow 5$ est un nombre paire" .
- $S:"1.25 \in$ □ $\Leftrightarrow 25$ est un multiple de 5"

Résumer du cours

➪ ***Lois de Morgan***

Soient P, Q et R trois propositions on a

$(1).P \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$ $(2).(PetQ) \Leftrightarrow (QetP)$

$(3).(PouQ) \Leftrightarrow (QouP)$ $(4).\overline{(PetQ)} \Leftrightarrow (\overline{p})ou(\overline{Q})$

$(5).\overline{(PouQ)} \Leftrightarrow (\overline{p})et(\overline{Q})$ $(6).(Pet(QouR)) \Leftrightarrow (PetQ)ou(PetR)$

$(7).(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

Activité d'initiation

2. Fonction propositionnelle

Activité

On considère l'expression suivante : "$x \in \mathbb{R} \; / \; x^2 - x \geq 0$"

1) L'expression précédente s'agit-il d'une proposition ?
2) Donner la valeur de vérité de l'expression précédente si $x = 2$ et si $x = \frac{1}{2}$

Résumer du cours

Définition

On appelle ***fonction propositionnelle***, tout énoncé mathématique contient une ou plusieurs variables appartenant à un ensemble bien définie, et qui est susceptible d'être une proposition si on attribue à ses variables certaines valeurs particulier dans l'ensemble et se note $P(x), P(x,y)$.....

Exemple

- $P(x)$: "$x \in \mathbb{R} ; x + 2 > 0$" est une fonction propositionnelle

$P(-1)$ est vraie et $P(-5)$ est fausse.

$Q(x,y)$: "$(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 4$" est une fonction propositionnelle

$Q(0;2)$ est vraie et $Q(-1;1)$ est fausse.

Activité d'initiation

II. Quantificateurs

Activité

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes

P : " Il existe au moins un nombre réel x tel que $|3x - 2| = 4$"

Q : " Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 + 1 \geq 0$"

S : " Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 > 0$"

➯ Définition

Soit "$(x \in E) ; P(x)$" une fonction propositionnelle telle que E est un ensemble bien défini.

◦ La proposition "$(\exists x \in E) ; P(x)$" est une proposition vraie lorsque on trouve au moins un x dans E pour lequel $P(x)$ est vraie.

On dit dans ce cas « il existe un x appartenant à E tel que $P(x)$ soit vraie »

Le symbole $\exists$ s'appelle ***le quantificateur existentiel.***

◦ La proposition "$(\forall x \in E) ; P(x)$" est une proposition vraie lorsque les propositions $P(x)$ soient vraies pour tout x dans E.

On dit dans ce cas « pour tout x appartenant à E, $P(x)$ soit vraie »

Le symbole $\forall$ s'appelle ***le quantificateur universel.***

En particulier : S'il existe un seul élément x dans E vérifier $P(x)$, alors dans ce cas on écrit "$(\exists! x \in E), P(x)$".

Le symbole $\exists!$ s'appelle ***quantificateur d'existence et d'unicité***

60 minutes

cours

Exemple

$\otimes$ On considère la fonction propositionnelle suivante : $"(x \in \mathbb{R});x^2-1=0"$

$"(\forall x \in \mathbb{R});x^2-1=0"$ F ; $"(\exists x \in \mathbb{R});x^2-1=0"$ V ; $"(\exists! x \in \mathbb{R});x^2-1=0"$ F

Question :

1) Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

$P:"(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R});y=2x-1"$;
$Q:"(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R});y=2x-1"$ $S:"(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R});y=2x-1"$

2) Que remarquez-vous ?

Résumer du cours

Remarque :

•L'ordre des quantificateurs de même nature n'a aucune importance pour déterminer le sens du terme quantifié.
•L'ordre des quantificateurs de nature différents est important pour déterminer le sens du terme quantifié.

Evaluation

Exercice 1 de la série

Résumer du cours

➩ Négation d'une proposition quantifiée

Propriété

Soit $"(x \in E);P(x)"$ une fonction propositionnelle

$\otimes$ La négation de la proposition $"(\exists x \in E);P(x)"$ est la proposition $"(\forall x \in E);\overline{P(x)}"$.

$\otimes$ La négation de la proposition $"(\forall x \in E);P(x)"$ est la proposition $"(\exists x \in E);\overline{P(x)}"$.

Exemple

- La négation de la proposition $P:"(\forall x \in \mathbb{R});x^2 \geq 0"$ est la proposition $\overline{P}:"(\exists x \in \mathbb{R});x^2<0"$.
- La négation de la proposition $P:"(\exists x \in \mathbb{R});x^2-2=0"$ est la proposition $\overline{P}:"(\forall x \in \mathbb{R});x^2-2 \neq 0"$.

Application⑥

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes, puis donner leur négation.

•$"(\forall x \in \mathbb{R});x^2+3x+4>0"$; •$"(\exists x \in \mathbb{R});2x^2+3x=0"$;
•$"(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})x^2+y^2 \geq 1"$. •$"(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R});x+y>0"$;
•$"(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R});x+y>0"$; •$"(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}^*);x+y=0"$.

Exercice 02 de la série

Résumer de cours

III. Raisonnements mathématiques

1. Raisonnement par la contraposition

Définition

Etant donné deux propositions P et Q

Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, il suffit de montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est vraie.

Ce raisonnement est basé sur la loi logique suivant $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

Exemple

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \ ; \ x \neq y \Rightarrow 3\sqrt{x} + 1 \neq 3\sqrt{y} + 1$

Pour montrer $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \ ; \ x \neq y \Rightarrow 3\sqrt{x} + 1 \neq 3\sqrt{y} + 1$ il suffit de montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \ ; 3\sqrt{x} + 1 = 3\sqrt{y} + 1 \Rightarrow x = y$

On a $3\sqrt{x} + 1 = 3\sqrt{y} + 1 \Rightarrow 3\sqrt{x} = 3\sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow x = y$

Donc d'après le raisonnement par le contraposé on a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$;
$x \neq y \Rightarrow 3\sqrt{x} + 1 \neq 3\sqrt{y} + 1$.

120 minutes

Evaluation

Application ⑦ : Exercice 04 de la série

Résumer du cours

2. Raisonnement par équivalences successives

Propriété

Soient P, Q et R trois propositions
Raisonnement par l'équivalence est basé sur la loi logique suivant :
« Si $P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow R$ alors $P \Leftrightarrow R$ » .

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$; montrer que $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$

On a $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$

Application ⑧

- Soit $x \in \mathbb{R}$ montrer que
- $\sqrt{x^2+3} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$; $|x-1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}$
- Soient x et y deux nombres réels tels $x \geq 1$ et $y \geq 4$ montrer que
- $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x = 2$ et $y = 8$

Evaluation	**_Exercice 05 de la série_**	

Résumer de cours

3. _Raisonnement par disjonction des cas_

Propriété

Etant donné deux propositions P et Q

Il faut que les deux propositions $P \Rightarrow Q$ et $\overline{P} \Rightarrow Q$ soient vraies.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(E): 2|x-1|+x=0$

Premier cas : si $x-1 \geq 0$ alors $|x-1| = x-1$

Donc l'équation (E) devient $2(x-1)+x=0$

c.-à-d. $2x-2+x=0$ par conséquent $x=\frac{2}{3}$

Deuxième cas : si $x-1 \leq 0$ alors $|x-1| = -x+1$

Donc l'équation (E) devient $2(-x+1)+x=0$

c.-à-d. $-2x+2+x=0$ par conséquent $x=2$

D'où $S=\varnothing$

Evaluation

Application ⑨ : Exercice 03 de la série

Résumer du cours

4. _Résonnement par contre-exemple_

Exemple

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 > 0$ est fausse

Si $x=0$ alors $0^2 > 0$ ce qui est impossible par conséquent $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 > 0$ est fausse.

Evaluation

Application ⑩

Montrer que les propositions suivantes sont fausses

- $(\forall x \in \mathbb{N})$ le nombre x^2 est un nombre impair
- $(\forall n \in \mathbb{N})$ le nombre n^2+n+1 est un nombre premier.

Exercice 06 de la série

120 minutes

Activité

1. _Raisonnement par l'absurde_

Activité

Soient P et Q deux propositions telles que "$\overline{Q} \Rightarrow P$ et $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$" est une proposition vraie

Si Q est fausse, que peut-on dire pour la valeur de vérité de P.

Règle

Soit P une proposition. Pour montrer que la proposition P est vraie, on suppose que P est fausse puis trouver la contradiction avec les données d'exercices et le prérequis.

Exemple

Montrer $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \neq x-1$

On suppose que $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \neq x-1$ alors $(\exists x \in \mathbb{R}); x^2 = x-1$

Résumer du cours

On a $x^2 = x - 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$

On a $\Delta = (-1)^2 - 4\times1\times1 = -3 < 0$

Donc l'équation n'a pas de solutions ; donc il y a une contradiction

Par conséquent $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \neq x - 1$

Evaluation

Application ①①

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $n - 1 \neq n - 2$
2) ABC un triangle de côtés $AB = 4, AC = 3$ et $BC = 6$. Montrer que le triangle ABC n'est pas rectangle en A .
3) Soient $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)(\forall z \in \mathbb{R}_+^*)$ tels que $xyz > 1$ et $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ Montrer que $x \neq 1$, $y \neq 1$ et $z \neq 1$

Résumer du cours

5. *Résonnement par récurrence*

Propriété

Soit $P(n)$ une fonction propositionnelle et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$

Pour montrer que $"(\forall n \geq n_0); P(n)"$ est vraie, on suit les étapes suivantes :

- Vérifier que $P(n_0)$ est vraie
- Supposer que $"P(n)"$ est vraie.
- Montrer que $"(\forall n \geq n_0); P(n+1)"$ est vraie
- Conclure que $"(\forall n \geq n_0); P(n)"$ est vraie
- D'après le principe de récurrence on a $"(\forall n \geq n_0); P(n)"$.

Remarque

En utilisant le principe de récurrence si n est un nombre entier naturel.

Exemple

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 3^n \geq 2n + 1$

Pour $n = 0$ on a $3^0 = 1 \geq 2\times0 + 1$ est une proposition vraie

Supposons que $3^n \geq 2n + 1$ est vraie et Montrer $3^{n+1} \geq 2(n+1) + 1$ c.-à-d Mq $3^{n+1} \geq 2n + 3$

On a $3^n \geq 2n + 1 \Rightarrow 3\times3^n \geq 3(2n+1) \Rightarrow 3^{n+1} \geq 6n + 3$

Or $6n + 3 \geq 2n + 3$

Alors $3^{n+1} \geq 2n + 3$

d'après le principe de récurrence on a $(\forall n \in \mathbb{N}); 3^n \geq 2n + 1$.

Evaluation

Application ①②

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

- $2^n \geq n + 1$
- $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
- Le nombre $4^n - 1$ est un multiple de 3.

2) Montrer $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$