Fiche technique

Professeur : Mouad Zillou	**Matière : Mathématiques**

	Durée : 10 heures	**Niveau : TCSF**
Les capacités attendues	• Utiliser la calculatrice scientifique pour déterminer une valeur approchée d'un angle défini par l'un de ses lignes trigonométriques et inversement. • Maitriser les lignes trigonométriques des angles usuels et appliquer les différentes relations.	
Contenus du programme	• Cercle trigonométrique, les abscisses curvilignes d'un point, l'abscisse curviligne principale ; • Angle orienté de deux demi-droites ayant même origine, la mesure principale, relation de Chasles ; • Relation entre le degré, le radian et le grade ; • Angle orienté de deux vecteurs et mesure de cet angle ; • Lignes trigonométriques d'un nombre réel et lignes trigonométriques d'un angle de deux vecteurs ; • Relations : $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$; $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$; $\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$ • Lignes trigonométriques d'un angle de mesure : 0 ; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$ • Relations entre les lignes trigonométriques de deux angles dont la somme ou la différence des mesures est égale à : 0 ; $\frac{\pi}{2}$; π modulo 2π .	
Recommandations pédagogique	• On définira tout point du cercle trigonométrique par son abscisse curviligne principale ou par ses coordonnées par rapport à un repère orthonormé lié au cercle trigonométrique.	
Fichiers utilisés dans la préparation du cours	• Les orientations pédagogiques.+ Livre d'élève + Des sites électroniques. Distribution périodique du programme de mathématiques	
Rôle de l'enseignant	Ecrire l'activité au tableau + Marquer les difficultés + Répartir les tâches + Donner une durée suffisante pour la recherche individuelle + Diagonaliser les prérequis des apprenants + Noter les observations	
Rôle de l'apprenant	Ecrire les activités + Répondre aux questions de l'activité avec la justification de ses solutions et formuler les résultats de l'activité sous forme d'un théorème/propriété et répondre aux exercices	

Outils didactiques : Tableau, livre ,craie, compas , rapporteur …

Etapes	Contenu du cours et activités	Durée

Résumer du cours — 30 min

I. Cercle trigonométrique – Abscisse curviligne

Dans tout le chapitre, le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$

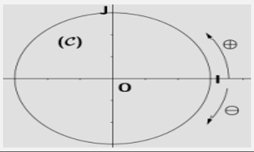
1. *Cercle trigonométrique*

a- *Définition*

On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens antihoraire (aussi appelé sens direct ou sens positif).

Le point I : S'appelle l'origine de (C)

Le triplet $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ s'appelle repère orthonormé direct lié au (C).



⊕ : signifie le sens direct ou sens antihoraire

Activité — 60 min

b- *Unités de mesure des angles*

Activité

Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I.

1) Soit M un point de (C) , et α la mesure de l'angle IOM en degré, remplir le tableau suivant :

Mesure de IOM en degré	360	180	90	60	45	30
Longueur de l'arc IM	…	…	…	…	…	…

2) Montrer que si l est la longueur de l'arc IM alors $l = \alpha \dfrac{\pi}{180}$

Résumer du cours

Définition

Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I et soit M un point de (C)

*La longueur de l'arc IM intercepte par l'angle géométrique IOM est la mesure de IOM en radian et se note rad ou rd telle que la mesure d'un angle plat en radian est égale à πrd .

*Il existe une autre unité de mesure des angles s'appelle le grade et se note gr telle que la mesure d'un angle plat en grade est égale à 200gr.

Remarque

Par l'utilisation de la proportionnalité : Si α, β et γ sont respectivement des mesures d'un angle en **degré, en radian** et en **grade** respectivement alors : $\dfrac{\alpha}{180} = \dfrac{\beta}{\pi} = \dfrac{\gamma}{200}$

Evaluation — 30 min

1) Compléter le tableau suivant :

Mesure de l'angle en degré	$60°$	…	…	…	$150°$
Mesure de l'angle en radian	…	$\dfrac{2\pi}{3}$	…	$\dfrac{\pi}{6}$	…
Mesure de l'angle en grade	…	…	50	…	…

2) Déterminer, en radian, les mesures des angles d'un triangle équilatérale.

3) Déterminer, en radian, les mesures des angles d'un triangle ABC isocèle en A tel que $A = 120°$

NB : Dans la suite, en utilisant le radian comme unité de mesure des angles sans écrire rd ou rad

Résumer du cours

2. *Abscisse curviligne – Abscisse curviligne principale*

Définition

Soit (C) un cercle trigonométrique.

Tout point M de (C) s'associe par à un nombre réel de forme $\alpha+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$ s'appelle abscisse curviligne du point M et on écrit $M(\alpha+2k\pi)$.

Remarques :

Θ Tout point M de (C) admet une infinité d'abscisses curvilignes.

Θ Tout point M de (C) admet une abscisse curviligne appartient à l'intervalle $]-\pi,\pi]$ et s'appelle ***abscisse curviligne principale*** du point M.

Techniques

Pour déterminer α_0 $(\alpha_0\in]-\pi,\pi])$ l'abscisse curviligne principale d'un point :

- Si α est l'abscisse curviligne d'un point, alors il faut l'écrire sous forme $\alpha=\alpha_0+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$
- Si $\alpha=\alpha_0+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$ alors $\alpha_0=\alpha-2k\pi$; la méthode c'est de déterminer la valeur de k

Exemple

Méthode 01

Déterminer l'abscisse curviligne principale du point $A\left(\frac{25\pi}{4}\right)$

On a $\frac{25\pi}{4}=\frac{24\pi+\pi}{4}=6\pi+\frac{\pi}{4}$

Donc l'abscisse curviligne principale du point A est $\frac{\pi}{4}$

Méthode 02

On a $\frac{25\pi}{4}=\alpha_0+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$ donc $\alpha_0=\frac{25\pi}{4}-2k\pi$

Or $\alpha_0\in]-\pi,\pi]$ donc $-\pi<\frac{25\pi}{4}-2k\pi\le\pi$ Alors $-1-\frac{25}{4}<-2k\le1-\frac{25}{4}$

Par conséquent $\frac{21}{8}\le k<\frac{29}{8}$ c-à-d $2,625\le k<3.625$

Puisque $k\in\mathbb{Z}$ alors $k=3$ D'où $\alpha_0=\frac{25\pi}{4}-2\times3\pi=\frac{25\pi-24\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

Donc l'abscisse curviligne principale du point A est $\frac{\pi}{4}$

120 min

Evaluation

Déterminer les abscisses curvilignes principales des points suivants :

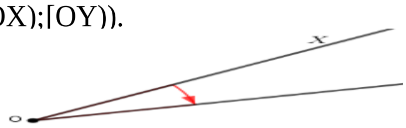
$A\left(\frac{7\pi}{2}\right)$; $B\left(\frac{67\pi}{4}\right)$; $C\left(\frac{267\pi}{6}\right)$; $D\left(\frac{-11\pi}{3}\right)$

Résumer du cours

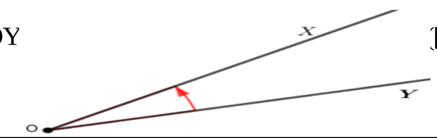
II. Angles orientés

1. *Les angles orientés par deux demi droites :*

Dans le plan orienté, on considère deux demis droits $[OX)$ et $[OY)$ l'angle déterminé par le couple $([OX),[OY))$ s'appelle l'angle orienté de deux demi droite on le note : ([OX);[OY)).

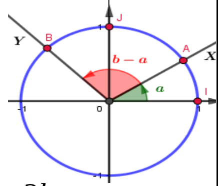
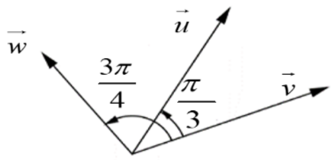
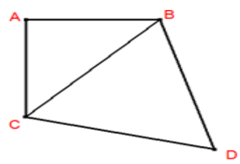


([OX);[OY



[OY);[OX))

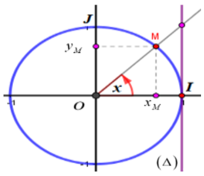
60 min

	2. ***Mesures d'un angle orienté par deux demi droites :*** Soit $[OX)$ et $[OY)$ deux demi droites d'origine O et soit (C) le cercle trigonométrique de centre O. Soient $A(a)$ et $B(b)$ les points d'intersections de (C) avec les demi-droites $[OX)$ et $[OY)$ respectivement.  **Définitions :** On appelle mesure de l'angle orienté $(OX;OY)$ tout réel qui s'écrit sous la forme : $(b-a)+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et on le note : $(\overline{OX;OY}) \equiv (b-a)+2k\pi$ Se lit :*la mesure de l'angle* $([OX);[OY))$ *est **congru** à* $(b-a)$ ***modulo*** 2π . ***Remarque*** Parmi toutes les mesures de $([OX);[OY))$, une seule dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$ c'est la mesure principale. ***Propriété (Relation de Chasles)*** Soient $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté on a : $(\overline{\vec{u},\vec{w}})+(\overline{\vec{w},\vec{v}}) \equiv (\overline{\vec{u},\vec{v}})[2\pi]$	
Evaluation	Déterminer une mesure de l'angle $(\overline{\vec{u},\vec{w}})$.  	10 min
Résumer du cours	***Propriété*** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté on a : $\odot (\overline{\vec{u},\vec{u}}) \equiv 0[2\pi]$; $\odot (\overline{\vec{u},-\vec{u}}) \equiv \pi[2\pi]$ $\odot (\overline{\vec{v},\vec{u}}) \equiv -(\overline{\vec{u},\vec{v}})[2\pi]$; $\odot (\overline{-\vec{u},-\vec{v}}) = (\overline{\vec{u},\vec{v}}) \equiv [2\pi]$ $\odot (\overline{\vec{u},-\vec{v}}) \equiv (\overline{\vec{u},\vec{v}})+\pi[2\pi]$; $\odot (\overline{-\vec{u},\vec{v}}) \equiv (\overline{\vec{u},\vec{v}})+\pi[2\pi]$ Conséquence Soient k et k' deux nombres non nuls. • Si k et k' ont même signe alors $(\overline{k\vec{u},k'\vec{v}}) \equiv (\overline{\vec{u},\vec{v}})[2\pi]$ • Si k et k' ont des signes contraires alors $(\overline{k\vec{u},k'\vec{v}}) \equiv (\overline{\vec{u},\vec{v}})+\pi[2\pi]$	30 min
Evaluation	On considère la figure ci-contre telle que le triangle DBC est équilatéral et le triangle ABC est isocèle en A. Déterminer les mesures suivantes : $(\overline{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BD}})$; $(\overline{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}})$; $(\overline{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$; $(\overline{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}})$.  	30 min
Résumer du cours	***III. Les rapports trigonométriques d'un nombre réel*** ***1. Introduction*** Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I et soit J un point de (C) tel que $(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit M un point de (C) d'abscisse curviligne x et soit (Δ) la droite passant en I et parallèle à (OJ) . Voir la figure ci-dessous	90 min

on a $\begin{cases} \cos(x) = \dfrac{x_M}{OM} = \dfrac{x_M}{1} = x_M \\ \sin(x) = \dfrac{y_M}{OM} = \dfrac{y_M}{1} = y_M \end{cases}$ M à pour coordonnées $M(\cos(x);\sin(x))$.

Si M' d'abscisse curviligne $x+2k\pi / k\in\mathbb{Z}$ alors M' confondue

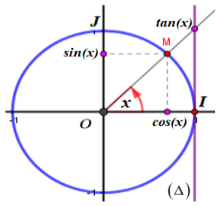
Avec le point M par conséquent : $\begin{cases} \cos(x+2k\pi)=\cos(x) \\ \sin(x+2k\pi)=\sin(x) \end{cases} / k\in\mathbb{Z}$



L'intersection de la droite (OM) et (Δ) détermine la tangente de nombre réel x

2. Définitions :

Soit (C) un cercle trigonométrique Dans et $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ un repère orthonormé direct lié au (C) et soit M un point de (C).



L'abscisse du point M s'appelle le cosinus de nombre réel x et se note $\cos(x)$

L'ordonné du point M s'appelle le sinus de nombre réel x et se note $\sin(x)$

L'intersection de la droite (OM) et (Δ) détermine la tangente de nombre réel x et se note $\tan(x)$.

3. Propriétés :

Soit $x\in\mathbb{R}$ on a

$\otimes -1\le\cos(x)\le 1$ $\otimes -1\le\sin(x)\le 1$

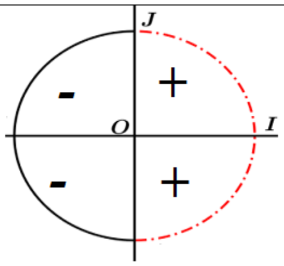
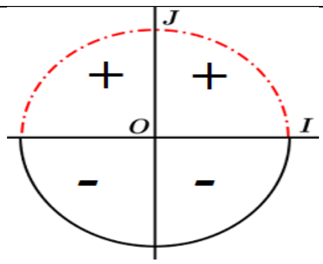
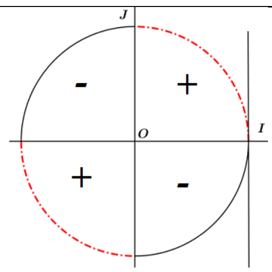
$\otimes\cos(x+2k\pi)=\cos(x)$ $\otimes\sin(x+2k\pi)=\sin(x)$ $\otimes\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$

$\otimes\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)},\quad si\ x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}$

$\otimes 1+\tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)},\quad si\ x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}$

$\otimes\tan(x+k\pi)=\tan(x) / k\in\mathbb{Z}$

4. Signe de cosinus, sinus et tangente sur $\mathbb{R}$

		
Signe de cosinus	***Signe de sinus***	***Signe de tangente***

Evaluation

1) Soit $x\in\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$ tel que $\cos(x)=\dfrac{-4}{5}$; calculer $\sin(x)$ et $\tan(x)$.

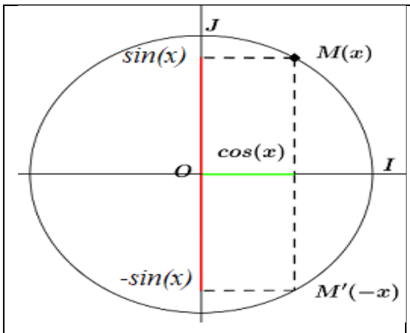
2) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$; $\cos^4(x)+\sin^4(x)=1-\cos^2(x)\sin^2(x)$

15 min

5. ***Relation entre les rapports trigonométriques***

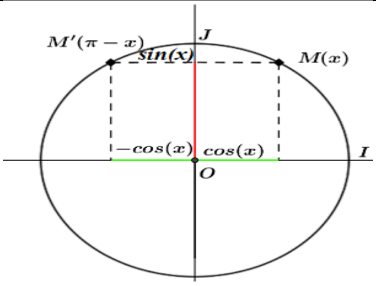
Soit (C) un cercle et M un point du cercle (C) d'abscisse curviligne x

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a les relations suivantes :



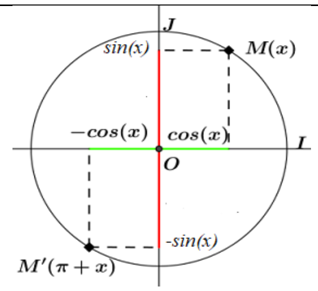
$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \\ \tan(-x) = -\tan(x) \end{cases}$$

$$\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right)$$



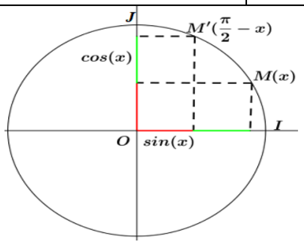
$$\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) = \sin(x) \\ \tan(\pi - x) = -\tan(x) \end{cases}$$

$$\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right)$$



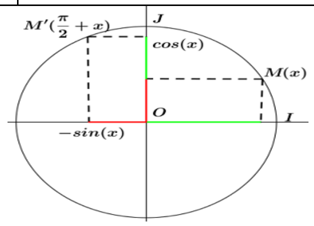
$$\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi + x) = -\sin(x) \\ \tan(\pi + x) = \tan(x) \end{cases}$$

$$\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right)$$



$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\tan(x)} \end{cases}$$

$$\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right) \; ; \; \left(x \neq k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right)$$



$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \dfrac{-1}{\tan(x)} \end{cases}$$

$$\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right) \; ; \; \left(x \neq k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right)$$

Résumer du cours — 90 min

Evaluation — 15 min

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \cos(\pi + x) + \cos(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(13\pi + x)$$

$$B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(12\pi + x) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi - x)$$

Résumer du cours	**1. Rapports trigonométriques des angles usuels** TABLE		20 min

1. Rapports trigonométriques des angles usuels

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Non définie	0

Evaluation

Calculer : $\sin\left(\frac{35\pi}{6}\right)$; $\cos\left(\frac{-23\pi}{3}\right)$; $\sin\left(\frac{17\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(\frac{-10\pi}{3}\right)$